SỞ GD&ĐT THÁI NGUYÊN	**KÌ THI OLYMPIC CÁC MÔN CHUYÊN**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN	**DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 8, LỚP 9**
(Đề thi gồm có 01 trang)	**NĂM HỌC 2025 – 2026**
	ĐỀ THI MÔN TOÁN
	Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (1,0 điểm) Giải phương trình $2\sqrt{2x+1}=x+2\sqrt{x-3}$

Câu 2. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số thực m,n để phương trình $x^2+5mx+3n=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $a,b>0$ và phương trình $x^2+2mx+n=0$ có hai nghiệm thực $\sqrt{a},\sqrt{b}$.

Câu 3. (1,0 điểm) Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ thỏa mãn dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho các đa thức $x^2+7x+10$ và x^2+5x+6 lần lượt là $2x-1$ và $x+7$?

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn n^4-15n^2+25 là số nguyên tố.

b) Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn cả ba số

$$A=a^3+bc(2a+3b+3c);\ B=b^3+ca(2b+3c+3a);\ C=c^3+ab(2c+3a+3b)$$

đều chia hết cho 11. Chứng minh rằng cả ba số a,b,c cùng chia hết cho 11.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thay đổi, thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

$$a^4b+b^4c+c^4a+18\geq 7(ab+bc+ca).$$

Câu 6. (1,0 điểm) Gieo ngẫu nhiên đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố "Tích các số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn tổng của chúng".

Câu 7. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có $AB<AC$, có các đường cao BE,CF. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh BC,CA,AB lần lượt tại các điểm D,U,V. Giả sử đường thẳng DI cắt các đường thẳng AC,AB lần lượt tại các điểm M,N.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BDEM$ và $CDFN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt đường thẳng AB tại điểm $K\neq B$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF cắt đường thẳng AC tại điểm $H\neq C$. Chứng minh rằng tứ giác $HKMN$ là tứ giác nội tiếp, từ đó suy ra $HK\perp EF$.

c) Đường thẳng HK lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác BDE, CDF lần lượt tại các điểm X,Y (với $X\neq K$ và $Y\neq H$). Gọi J là giao điểm của các đường thẳng YV và XU. Chứng minh rằng J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DXY.

----------------------------- *Hết* -----------------------------

SỞ GD&ĐT THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
(Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang)

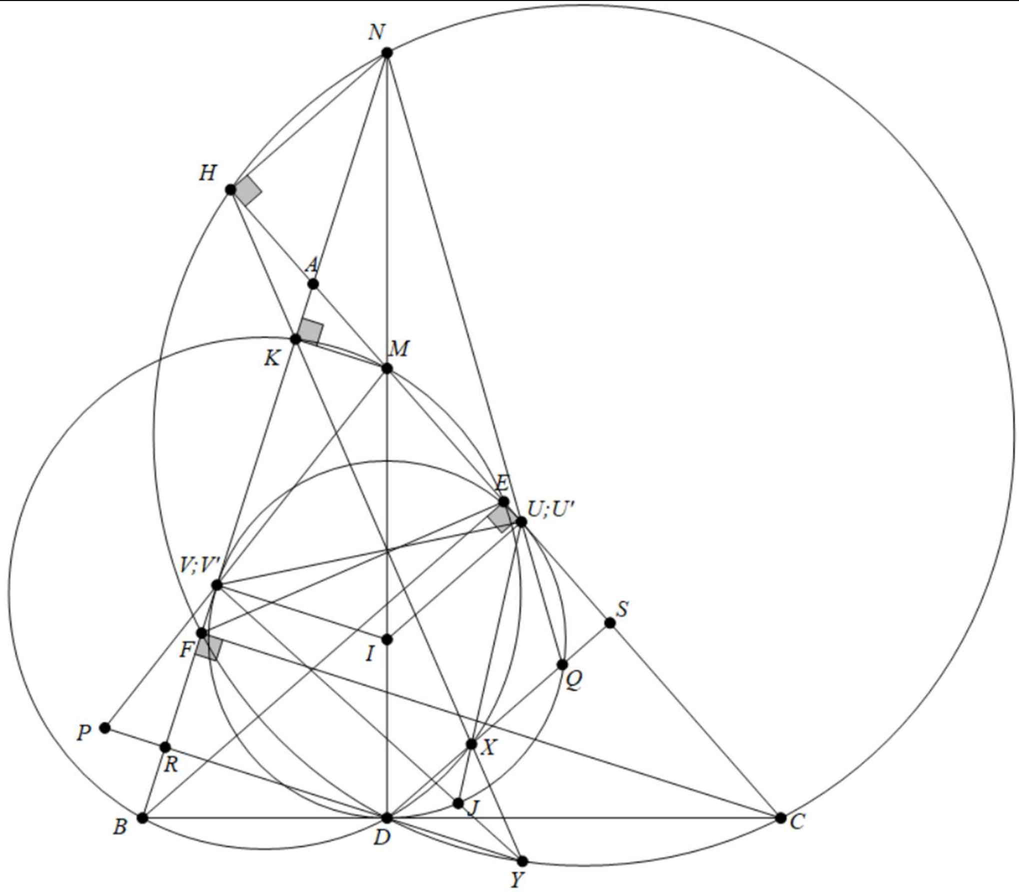
KÌ THI OLYMPIC CÁC MÔN CHUYÊN
DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 8, LỚP 9
NĂM HỌC 2025 – 2026
ĐỀ THI MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	ĐKXĐ: $x \geq 3$	**0,25**
	Ta viết lại phương trình đã cho: $$2\sqrt{2x+1}=x+2\sqrt{x-3}$$ $$2\sqrt{2x+1}-x-2=2\sqrt{x-3}-2$$ $$\frac{4(2x+1)-(x+2)^2}{2\sqrt{2x+1}+x+2}=\frac{2(x-3-1)}{\sqrt{x-3}+1}$$ $$\frac{4x-x^2}{2\sqrt{2x+1}+x+2}=\frac{2(x-4)}{\sqrt{x-3}+1}$$ $$\frac{2(x-4)}{\sqrt{x-3}+1}+\frac{x(x-4)}{2\sqrt{2x+1}+x+2}=0$$ $$(x-4)\left(\frac{2}{\sqrt{x-3}+1}+\frac{x}{2\sqrt{2x+1}+x+2}\right)=0$$	**0,25**
	Xét $x \neq 4$, ta có $\frac{2}{\sqrt{x-3}+1}+\frac{x}{2\sqrt{2x+1}+x+2}=0$, không xảy ra vì $x \geq 3$.	**0,25**
	Xét $x=4$ ta thấy thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=4$.	**0,25**
Câu 2	Từ giả thiết và theo định lí Vietè, ta có • $a+b=-5m$, • $ab=3n$, • $\sqrt{a}+\sqrt{b}=-2m$, • $\sqrt{ab}=n$. Vì $a>0$ và $b>0$ nên $m<0$ và $n>0$.	**0,25**
	Từ $ab=3n$ và $\sqrt{ab}=n$, ta có $n^2=3n$, mà $n>0$ nên $n=3$.	**0,25**
	Từ $\sqrt{a}+\sqrt{b}=-2m$ và $a+b=-5m$, ta có: $a+b+2\sqrt{ab}=4m^2$ $$-5m+6=4m^2$$ $$4m^2+5m-6=0$$	**0,25**

	$$(m+2)(4m-3)=0$$ Mà $m<0$ nên ta có $m=-2$.	
	Thử lại ta thấy $(m;n)=(-2;3)$ là cặp số duy nhất thỏa mãn đề bài.	**0,25**
Câu 3	Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta viết $$P(x)=(x^2+7x+10)Q(x)+2x-1,$$ $$P(x)=(x^2+5x+6)R(x)+x+7.$$	**0,5**
	Khi đó ta có $$(x+2)(x+5)Q(x)+2x-1=(x+2)(x+3)R(x)+x+7.$$	**0,25**
	Cho $x=-2$ ở cả hai vế, ta có $-5=5$, mâu thuẫn. Vậy giả sử sai, tức là không tồn tại đa thức $P(x)$ nào thỏa mãn.	**0,25**
Câu 4	a) Ta có n^4-15n^2+25 $=(n^2+5)^2-25n^2$ $=(n^2+5)^2-(5n)^2$ $=(n^2-5n+5)(n^2+5n+5)$ là số nguyên tố.	**0,5**
	Mà $n^2+5n+5>0$ nên $n^2-5n+5>0$, do đó $$n^2+5n+5>n^2-5n+5>0$$ Cũng vì $(n^2-5n+5)(n^2+5n+5)$ là số nguyên tố nên $n^2-5n+5=1$.	**0,25**
	Ta tìm được $n=1$ hoặc $n=4$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.	**0,25**
	b) Ta có $A+B+C$ $=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab(a+b)+3bc(b+c)+3ca(c+a)$ $=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$ $=(a+b+c)^3$ chia hết cho 11.	**0,25**
	Do đó $a+b+c$ chia hết cho 11, mà $$A=a^3+bc(2a+3b+3c)$$ cũng chia hết cho 11 nên a^3-abc cũng chia hết cho 11.	**0,25**
	Giả sử phản chứng rằng ba số a,b,c không đồng thời chia hết cho 11. Không mất tổng quát, giả sử a không chia hết cho 11. Từ a^3-abc chia hết cho 11, ta có a^2-bc chia hết cho 11, mà $$a^2-bc=a^2-(b+c)^2+(b+c)^2-bc=(a-b-c)(a+b+c)+b^2+bc+c^2$$ nên b^2+bc+c^2 chia hết cho 11, suy ra $(2b+c)^2+3c^2$ chia hết cho 11.	**0,25**

	Chú ý rằng với mọi số nguyên x thì $$x^2 \equiv 0,1,3,4,5,9 \pmod{11}.$$ Do đó $3c^2 \equiv 0,3,9,1,4,5 \pmod{11}$, suy ra $$(2b+c)^2 \equiv 0,8,2,10,7,6 \pmod{11}.$$ Đối chiếu với kết quả $x^2 \equiv 0,1,3,4,5,9 \pmod{11}$ với mọi x nguyên, ta thấy chỉ có $(2b+c)^2 \equiv 3c^2 \equiv 0 \pmod{11}$ thỏa mãn, khi đó cả b và c cùng chia hết cho 11, mà $A = a^3 + bc(2a+3b+3c)$ chia hết cho 11 nên a^3 chia hết cho 11, hay a chia hết cho 11, vô lí. Vậy giả sử phản chứng sai, ta có điều phải chứng minh.	**0,25**
Câu 5	Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $$a^4b+b+b+b \ge 4\sqrt[4]{a^4b\cdot b\cdot b\cdot b} = 4ab,$$ $$b^4c+c+c+c \ge 4\sqrt[4]{b^4c\cdot c\cdot c\cdot c} = 4bc,$$ $$c^4a+a+a+a \ge 4\sqrt[4]{c^4a\cdot a\cdot a\cdot a} = 4ca.$$ Từ đó ta có $a^4b+b^4c+c^4a+3a+3b+3c \ge 4(ab+bc+ca)$. Mà $a+b+c=3$ nên $a^4b+b^4c+c^4a+9 \ge 4(ab+bc+ca)$.	**0,5**
	Vì $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ nên $$3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 = 9.$$ Do đó $a^4b+b^4c+c^4a+18 \ge 4(ab+bc+ca)+9 \ge 7(ab+bc+ca)$.	**0,25**
	Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$, bất đẳng thức được chứng minh.	**0,25**
Câu 6	Số phần tử của không gian mẫu phép thử là $n(\Omega) = 6\cdot 6 = 36$.	**0,25**
	Gọi A là biến cố đã cho. Xét một phần tử $(a;b) \in A$, khi đó $ab < a+b$ hay $$(a-1)(b-1) < 1.$$ Mà $a-1, b-1$ là số tự nhiên nên $(a-1)(b-1)=0$, hay $a=1$ hoặc $b=1$. Ta thấy bất đẳng thức $ab<a+b$ đúng với $a=1$ và đúng với $b=1$, do đó $$A=\{(1;1);(1;2);(2;1);(1;3);(3;1);(1;4);(4;1);(1;5);(5;1);(1;6);(6;1)\}.$$	**0,5**
	Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$.	**0,25**

Câu 7	 *(Học sinh vẽ hình sai sẽ không được tính điểm)*	
	a) Vì $\widehat{BDM}=\widehat{BEM}=90^\circ$ nên tứ giác $BDEM$ nội tiếp đường tròn đường kính BM. Tương tự, ta có tứ giác $CDFN$ nội tiếp đường tròn đường kính CN.	**1,0**
	b) Vì điểm H thuộc đường tròn đường kính NC nên $\widehat{NHC}=90^\circ$. Vì điểm K thuộc đường tròn đường kính MB nên $\widehat{NKM}=\widehat{BKM}=90^\circ$. Do đó tứ giác $HKMN$ nội tiếp đường tròn đường kính MN, suy ra $\widehat{MHK}=\widehat{MNK}$. Mặt khác, ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC. Vì thế $$\widehat{EHK}+\widehat{AEF}=\widehat{MHK}+180^\circ-\widehat{FEC}=\widehat{MNK}+\widehat{ABC}=90^\circ.$$ Từ đó ta có các đường thẳng HK và EF vuông góc.	**1,0**
	c) Gọi R,S,P,Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB;DY),(AC;DX),(MV;DY),(NU;DX)$. Ta có $$\widehat{HYD}+\widehat{BKY}=\widehat{HCD}+\widehat{HKN}=\widehat{HCD}+\widehat{HMN}=\widehat{MCD}+\widehat{DMC}=90^\circ$$ nên $DY\perp AB$. Đồng thời, từ $\widehat{BKY}=\widehat{DMC}$, và từ $\widehat{KRY}=\widehat{MUI}=90^\circ$, ta có các tam giác KRY và MUI đồng dạng. Từ các điều này ta có • $\dfrac{VK}{VR}=\dfrac{VM}{VP}$ (do các tam giác KMV và RPV đồng dạng),	**1,0**

	• $\frac{VM}{VP}=\frac{IM}{ID}$ (do $IV \parallel DP$), • $\frac{IM}{ID}=\frac{IM}{IU}$ (do ID,IU đều là bán kính của (I)), • $\frac{IM}{IU}=\frac{YK}{YR}$ (do các tam giác MUI và KRY đồng dạng), Suy ra $\frac{YK}{YR}=\frac{VK}{VR}$. Gọi V' là chân đường phân giác trong kẻ từ Y của tam giác YKR, khi đó theo tính chất đường phân giác thì $\frac{V'K}{V'R}=\frac{YK}{YR}$ suy ra $\frac{V'K}{VK}=\frac{V'R}{VR}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có $$\frac{V'K}{VK}=\frac{V'R}{VR}=\frac{V'K+V'R}{VK+VR}=\frac{KR}{KR}=1.$$ Do đó $V'K=VK$ và $V'R=VR$, mà V và V' cùng nằm trên đoạn thẳng KR nên $V\equiv V'$, tức là YV cũng là phân giác của góc KYR, hay YJ là phân giác góc DYX. Tương tự với chứng minh $\frac{YK}{YR}=\frac{VK}{VR}$, ta có $\frac{XH}{XS}=\frac{UH}{US}$. Gọi U' là chân đường phân giác kẻ từ X của tam giác XHS, tương tự cách chứng minh $V\equiv V'$, ta có $U\equiv U'$, dẫn đến XU là phân giác góc HXS, suy ra XJ là phân giác góc DXY. Vậy J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DXY.	