

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 02 trang, 5 câu)

Câu 1. (4,0 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$

b.
$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 = y^2 \\ 2y^2 - 3y + 2 = x^2 \end{cases}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ thỏa mãn điều kiện $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$ thì tam giác đó là tam giác vuông.

b. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ với $R < R'$, cắt nhau tại A và B sao cho $OA O' = 90^\circ$. Đường thẳng OO' cắt đường tròn $(O; R)$ tại C, D và cắt đường tròn $(O'; R')$ tại E, F sao cho các điểm C, O, E, D, O', F nằm trên đường thẳng theo thứ tự đó. Tia BE cắt đường tròn $(O; R)$ tại K (khác B) và cắt đoạn thẳng AC tại M . Tia BD cắt đường tròn $(O'; R')$ tại L (khác B) và cắt đoạn thẳng AF tại N . Chứng minh ba điểm A, C, L thẳng hàng.

Câu 3. (4,0 điểm)

a. Tính giới hạn sau: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n - 1} - 2n)$

b. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1; u_{n+1} = 2u_n + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n .

Câu 4. (4,0 điểm)

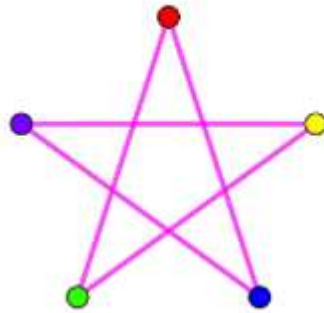
a. Một cái tháp có 9 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $a \text{ (m}^2\text{)}$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo a (đơn vị mét vuông).

b. Tìm tất cả các cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn: $5x^2 - 4xy + y^2 = 169$.

Câu 5. (4,0 điểm)

a. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi S là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

b. Mỗi đỉnh của một ngôi sao năm cánh được sơn một màu. Có 6 màu khác nhau để lựa chọn và hai đỉnh của mỗi cạnh phải có màu khác nhau (Hình minh họa phía dưới). Có bao nhiêu cách tô màu cho các đỉnh của ngôi sao đó?



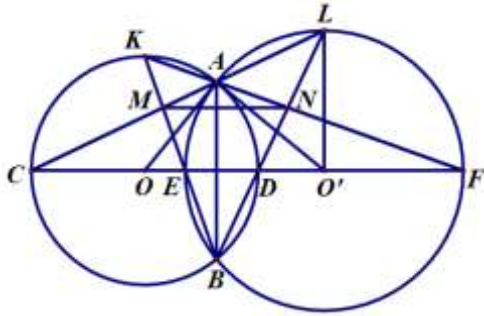
----- Hết -----

- Học sinh không được sử dụng tài liệu
- Học sinh không được sử dụng máy tính
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:; SBD:.....

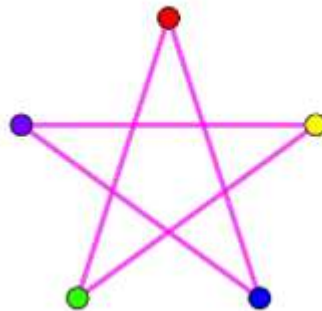
ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG TOÁN 12
NĂM HỌC : 2025 – 2026

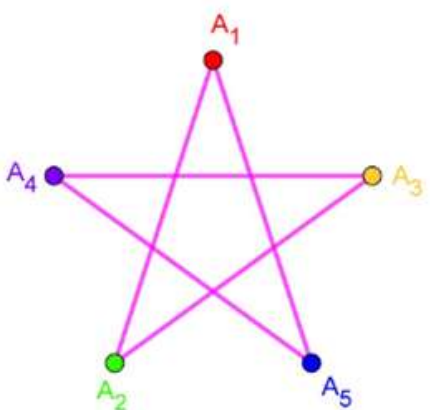
Câu	Ý	Lời giải	Điểm
1	a	$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$	2,0
		$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1$	0,5
		$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x = 1$	0,5
		$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$	0,5
		$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	0,5
	b	$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 = y^2 & (1) \\ 2y^2 - 3y + 2 = x^2 & (2) \end{cases}$	2,0
		$(1) - (2)$ $\Leftrightarrow 3(x^2 - y^2) - 3(x - y) = 0$ $\Leftrightarrow 3(x - y)(x + y - 1) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 1 - x \end{cases}$	0,5
		Th1: $y = x$ thế vào (1) ta được: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ Khi đó hệ có nghiệm (1;1) , (2;2)	0,5
		Th2: $y = 1 - x$ thế vào (1) ta được: phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm	0,5
		Vậy hệ có nghiệm : (1;1) , (2;2)	0,5
2	a	Chứng minh rằng nếu ΔABC thỏa mãn điều kiện $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$ thì tam giác đó là tam giác vuông.	2,0
		$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cos(A + B). \cos(A - B) + 2 \cos^2 C = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow 2 \cos(\pi - C). \cos(A - B) + 2 \cos^2 C = 0$ $\Leftrightarrow -2 \cos C. \cos(A - B) + 2 \cos^2 C = 0$	0,5

		$\Leftrightarrow 2 \cos C.(\cos C - \cos(A - B)) = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cos C.(-\cos(A + B) - \cos(A - B)) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow -4 \cos C. \cos A. \cos B = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = 90^\circ \\ C = 90^\circ \end{cases}$	0,5
	b	b. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ với $R < R'$, cắt nhau tại A và B sao cho $OA O' = 90^\circ$. Đường thẳng OO' cắt đường tròn $(O; R)$ tại C, D và cắt đường tròn $(O'; R')$ tại E, F sao cho các điểm C, O, E, D, O', F nằm trên đường thẳng theo thứ tự đó. Tia BE cắt đường tròn $(O; R)$ tại K (khác B) và cắt đoạn thẳng AC tại M. Tia BD cắt đường tròn $(O'; R')$ tại L (khác B) và cắt đoạn thẳng AF tại N. Chứng minh ba điểm A, C, L thẳng hàng.	2,0
			0,5
		$CAL = CAO + OAO' + O'AL$	0,5
		Ta có: $CAO = ACD$, $O'AL = O'LA = \frac{180^\circ - AO'L}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}AO'L = 90^\circ - ABL$	0,5
		Do đó: $CAL = ACD + 90^\circ + 90^\circ - ABL = ACD + 180^\circ - ABD = 180^\circ$ (do tứ giác $ACBD$ nội tiếp nên $ACD = ABD$). Suy ra A, C, L thẳng hàng.	0,5
	3	a	2,0
		Tính giới hạn sau: $L = \lim(\sqrt{4n^2 + 3n - 1} - 2n)$	
		$L = \lim(\sqrt{4n^2 + 3n - 1} - 2n)$ $= \lim \frac{(\sqrt{4n^2 + 3n - 1} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 3n - 1} + 2n)}{(\sqrt{4n^2 + 3n - 1} + 2n)}$	0,5
		$= \lim \frac{3n - 1}{(\sqrt{4n^2 + 3n - 1} + 2n)}$	0,5

		$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(3 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{1}{n} \right)}{\left(\sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2 \right)}$	0,5
		$\Rightarrow L = \frac{3}{4}$	0,5
	b	Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1; u_{n+1} = 2u_n + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n .	2,0
		Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_{n+1} = 2u_n + 3^n \Leftrightarrow u_{n+1} - 3^{n+1} = 2(u_n - 3^n)$.	0,5
		Xét dãy số (v_n) , với $v_n = u_n - 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $v_{n+1} = 2v_n$.	0,5
		Do đó, dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 2$ và số hạng đầu bằng -2 . Suy ra $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = -2^n$.	0,5
		Vậy $u_n = v_n + 3^n = 3^n - 2^n$.	0,5
	4	a Câu 4. (4,0 điểm) a. Một cái tháp có 9 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là a (m^2). Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo a (đơn vị mét vuông).	2,0
			0,5
			0,5
			0,5
			0,5
			0,5
			0,5
			0,5
	b	Tìm tất cả các cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn: $5x^2 - 4xy + y^2 = 169$.	2,0
		Phương trình (1) $\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 = 169 \Leftrightarrow (2x - y)^2 + x^2 = 169$	0,5

		$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)^2 + x^2 = 144 + 25 & (1) \\ (2x-y)^2 + x^2 = 169 + 0 & (2) \end{cases}$	
		Từ (1) ta có $\begin{cases} (2x-y)^2 = 12^2 \\ x^2 = 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \mp 2 \end{cases}; \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \mp 22 \end{cases}$ $\begin{cases} (2x-y)^2 = 5^2 \\ x^2 = 12^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 12 \\ y = \mp 19 \end{cases}; \begin{cases} x = \pm 12 \\ y = \mp 29 \end{cases}$	0,5
		Từ (2) ta có : $\begin{cases} (2x-y)^2 = 13^2 \\ x^2 = 0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 13 \end{cases}$ $\begin{cases} (2x-y)^2 = 0^2 \\ x^2 = 13^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 13 \\ y = \pm 26 \end{cases}$	0,5
		Vậy $(x; y) = \left\{ (5; -2); (5; -22); (-5; 2); (-5; 22); (12; -19); (12; -29); \right.$ $\left. (-12; 19); (-12; 29); (0; 13); (0; -13); (13; 26); (-13; -26) \right\}$	0,5
5	a	a. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi S là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.	2,0
		Gọi số cần tìm của tập S có dạng $\overline{abc}$. Trong đó $\begin{cases} a, b, c \in A \\ a \neq b; b \neq c; c \neq a \end{cases}$.	0,5
		Mỗi số có 3 chữ số khác nhau được lập từ tập A là một chỉnh hợp chập 3 của 6. Nên có: $A_6^3 = 120$ số $\Rightarrow n(\Omega) = 120$	0,5
		Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu". Khi đó ta có các bộ số là $\overline{1b2}$ hoặc $\overline{2b4}$ hoặc $\overline{3b6}$ thỏa mãn biến cố X và cứ mỗi bộ thì b có 4 cách chọn nên có tất cả 12 số thỏa yêu cầu.	0,5
		Suy ra số phần tử của biến cố X là $n(X) = 12$. Vậy xác suất cần tính $P_X = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{1}{10}$	0,5
	b.	Mỗi đỉnh của một ngôi sao năm cánh được sơn một màu. Có 6 màu khác nhau để lựa chọn và hai đỉnh của mỗi cạnh phải có màu khác nhau (Hình minh họa phía dưới). Có bao nhiêu cách tô màu cho các đỉnh của ngôi sao đó ?	2,0



	Để thuận tiện ta gọi 6 màu khác nhau tương ứng là: 1;2;3;4;5;6 Tại đỉnh A_i ta điền $x_i \in 1;2;3;4;5;6$ Điều kiện: $\begin{cases} x_{i+1} \neq x_i; & i \in 1;2;3;4 & (1) \\ x_1 \neq x_5 & & (2) \end{cases}$		0,5
	Số cách thỏa mãn điều kiện (1) là: $6.5.5.5.5 = 6.5^4$		0,5
	Giờ ta tìm điền thỏa mãn điều kiện (1) Nhưng không thỏa mãn điều kiện (2) Viết lại chuỗi số có dạng: $x_1x_2x_3x_4x_1$ Bước 1: Chọn x_1 có 6 lựa chọn Bước 1: Chọn các vị trí còn lại + Nếu $x_2 = x_4$ thì có 5 lựa chọn cho $x_2; x_4$ và 5 lựa chọn cho x_3 + Nếu $x_2 \neq x_4$ thì có 5 lựa chọn cho x_2 và 4 lựa chọn cho x_4 và 4 lựa chọn cho x_3 Vậy số cách điền thỏa mãn điều kiện (1) Nhưng không thỏa mãn điều kiện (2) Là : $6.5.5 + 6.5.4.4$		0,5
	Vậy số cách sơn màu thỏa mãn là: $6.5^4 - (6.5.5 + 6.5.4.4) = 3120$		0,5

Chú ý: Nếu học sinh giải cách khác đúng thì cho điểm tối đa của ý đó