Sử dụng phép thế triệt tiêu cho bài toán phương trình hàm trên $\mathbb{R}^+$

LÊ PHÚC LỮ[*], TRẦN NHẬT QUANG[†]

Ngày 16 tháng 2 năm 2026

Trong quá trình giải các bài toán phương trình hàm trên tập $\mathbb{R}^+$, phép thế triệt tiêu là một cách tiếp cận bước đầu rất điển hình. Ta có thể hình dung nó thông qua 2 dạng: **(i)** *trực tiếp*, tức là với đề bài cho $f(A) = f(B) + C$ với A, B, C là các biểu thức chứa biến x, y; ta sẽ chọn x, y để $A = B$ làm cho triệt tiêu được các đại lượng giống nhau ở hai vế và thông thường thu được mâu thuẫn, khi đó ta sẽ có $A = B$ vô nghiệm và tạo thành điều kiện đánh giá mới cho f; **(ii)** *gián tiếp*, biểu thức không chứa sẵn hai f ở hai vế, ta cần đánh giá bất đẳng thức thêm rồi mới chọn được giá trị cho các biến sau. Trong bài viết nhỏ này, ta sẽ cùng tìm hiểu các cách áp dụng ý tưởng này thông qua những bài cụ thể, và hai kiểu thế triệt tiêu trực tiếp và gián tiếp.

§1 Các ví dụ minh hoạ

§1.1 Kĩ thuật triệt tiêu trực tiếp

Bài toán 1

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x) = f\left(\frac{x^2 - y}{f(x)}\right) + f\left(\frac{f(y)}{x}\right), \ \forall x > 0, y \in \left(0, x^2\right). \tag{1}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Phân tích — Ta thử triệt tiêu $f(x)$ và $f\left(\dfrac{x^2 - y}{f(x)}\right)$ bằng cách chọn $x > 0,\ y \in (0, x^2)$ thỏa mãn:

$$x = \frac{x^2 - y}{f(x)} \iff y = x^2 - xf(x).$$

Để phép thế trên là hợp lệ, ta cần sự tồn tại của số $x_0 > 0$ thỏa mãn $x_0^2 - x_0 f(x_0) > 0$, hay $x_0 > f(x_0)$.

[*] Giảng viên Trường Đại học Khoa học Tự nhiên TP. HCM

[†] Học viên Cao học Trường Đại học Sư phạm TP. HCM

Đầu tiên ta chứng minh $f(x) \geq x,\ \forall x > 0$. Giả sử phản chứng, tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $x_0 > f(x_0)$. Khi đó thay $y = y_0$ và $x = x_0^2 - x_0 f(x_0)$ vào (1) thì được:

$$f(x_0) = f(x_0) + f\left(\frac{f(y_0)}{x_0}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{f(y_0)}{x_0}\right) = 0,\ \text{vô lý!}$$

Do đó $f(y) \geq y,\ \forall y > 0$.

Phân tích — Tiếp theo, ta thử triệt tiêu $f(x)$ và $f\left(\dfrac{f(y)}{x}\right)$ bằng cách chọn $x > 0,\ y \in (0, x^2)$ thỏa mãn:

$$x = \frac{f(y)}{x} \iff f(y) = x^2 > y.$$

Phép thế trên sẽ thực hiện được nếu có số $y_0 > 0$ sao cho $f(y_0) > y_0$, rồi sau đó chọn tiếp $x = \sqrt{f(y_0)}$ để đảm bảo điều kiện $y_0 \in (0, x^2)$. Mà ở trên ta đã chứng minh được $f(y) \geq y,\ \forall y > 0$, nên chỉ cần một bước phản chứng nữa là bài toán được giải quyết trọn vẹn!

Giả sử phản chứng, tồn tại $y_0 > 0$ sao cho $f(y_0) > y_0$. Khi đó $y_0 \in (0, x_0^2)$, ở đây $x_0 = \sqrt{f(y_0)}$. Lúc này ta thay $x = x_0$ và $y = y_0$ vào (1) thì được:

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_0^2 - y_0}{f(x_0)}\right) + f(x_0) \Longrightarrow f\left(\frac{x_0^2 - y_0}{f(x_0)}\right) = 0,\ \text{vô lý!}$$

Do đó $f(y) = y,\ \forall y > 0$. Thử lại thấy đúng.
Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán là $f(x) = x^2,\ \forall x > 0$. □

Bình luận. Việc phát hiện ra đánh giá $f(y) \geq y,\ \forall y > 0$ có thể nói là bước ngoặt quan trọng để giải quyết bài toán trên. Từ đây, ta có thể tạo được bài toán khó hơn như sau:
Mở rộng: Xét số thực m và hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện

$$f(x) \geqslant f\left(\frac{x^2 - y}{f(x)}\right) + m \cdot \frac{yf(x)}{x^2} \quad \text{với mọi } x > 0, y \in \left(0; x^2\right).$$

(a) Chứng minh rằng nếu $m < 1$ thì có vô số hàm số f thoả mãn, nhưng nếu $m > 1$ thì không có hàm số nào thoả mãn.

(b) Với $m = 1$, biết rằng $f(2^n) = 2^n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$, tìm tất cả các hàm số f thoả mãn đề bài.

Các ví dụ tiếp theo sẽ cung cấp cho bạn đọc một số định hướng khai thác các đánh giá thu được từ phép thế triệt tiêu.

Bài toán 2 (Quảng Ninh 2022–2023)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\big(3f(x) + 3y\big) = f(3x + y) + 2y,\ \forall x, y > 0. \tag{2}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Trước hết ta sẽ chứng minh

$$f(x) \geq x,\ \forall x > 0. \tag{3}$$

Thật vậy, giả sử tồn tại $a > 0$ sao cho $f(a) < a$. Lúc này ta thay $x = a$ và $y = \dfrac{3[a - f(a)]}{2} > 0$ vào (2) thì được:

$$3[a - f(a)] = 0 \Longrightarrow f(a) = a, \text{ vô lí!}$$

Do đó (3) đúng. Ta sẽ chỉ ra $f(x) = x,\ \forall x > 0$ cũng bằng phản chứng: Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ để mà $f(x_0) > x_0$. Trong (2) cho $x = x_0$ thì có:

$$f\big(3f(x_0) + 3y\big) = f(3x_0 + y) + 2y,\ \forall y > 0. \tag{4}$$

Đặt $A = 3f(x_0) - 3x_0 > 0$. Sử dụng (3) cho vế trái của (4), ta được:

$$\begin{aligned} & f(3x_0 + y) + 2y \geq 3f(x_0) + 3y,\ \forall y > 0 \\ \Longrightarrow \quad & f(y + 3x_0) \geq y + 3f(x_0),\ \forall y > 0. \end{aligned}$$

Đến đây thay y bởi $y - 3x_0$ ta được: $f(y) \geq y + A,\ \forall y > 3x_0$. Lặp lại quá trình trên, ta sẽ thu được đánh giá sau:

$$f(y) \geq y + nA,\ \forall y > 3x_0, n \in \mathbb{N}^*. \tag{5}$$

Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo n. Giả sử ta đã có $f(y) \geq y + kA,\ \forall y > 3x_0$ (k là một số nguyên dương nào đó). Nhiệm vụ của ta bây giờ là chứng minh:

$$f(y) \geq y + (k+1)A,\ \forall y > 3x_0.$$

Rõ ràng $3f(x_0) + 3y > 3x_0$ với mọi $y > 0$ nên theo giả thiết quy nạp thì:

$$\begin{aligned} & f\big(3f(x_0) + 3y\big) \geq 3f(x_0) + 3y + kA,\ \forall y > 0 \\ \stackrel{(4)}{\Longrightarrow}\ & f(3x_0 + y) + 2y \geq 3f(x_0) + 3y + kA,\ \forall y > 0 \\ \Longrightarrow\ & f(y + 3x_0) \geq y + 3f(x_0) + kA,\ \forall y > 0. \end{aligned}$$

Đến đây thay y bởi $y - 3x_0$ ta được:

$$f(y) \geq y + [3f(x_0) - 3x_0] + kA = y + (k+1)A,\ \forall y > 3x_0.$$

Do đó bất đẳng thức (5) đúng theo nguyên lý quy nạp. Bây giờ, trong (5) ta chọn $y = 3x_0 + 1$ và cho $n \to +\infty$ thì có ngay điều vô lý. Nói cách khác, $f(x) = x$ với mọi $x > 0$. Thử lại thấy đây là nghiệm hàm của bài toán. □

> **Bình luận.** Đánh giá (3) còn có thể khai thác được theo nhiều hướng khác và dẫn đến những lời giải độc đáo. Chi tiết hơn, bạn đọc có thể tham khảo trong [2].

Tiếp theo ta xét đến một ứng dụng của phép thế triệt tiêu trong việc chứng minh hàm cần tìm là đơn ánh.

Bài toán 3 (Sơn La 2021-2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\big(x + f(x) + y\big) = f(2x) + f(y),\ \forall x, y > 0. \tag{6}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán.
Nếu có số $x_0 > 0$ thỏa mãn $f(x_0) < x_0$ thì bằng cách thay $x = x_0$ và $y = x_0 - f(x_0) > 0$ vào (6), ta thu được:

$$f(2x_0) = f(2x_0) + f\big(x_0 - f(x_0)\big) \Longrightarrow f\big(x_0 - f(x_0)\big) = 0, \text{ vô lý!}$$

Điều vô lý ấy chứng tỏ $f(x) \geq x,\ \forall x > 0$. Ta tận dụng nhận xét này để chứng minh f là đơn ánh như sau: Giả sử tồn tại hai số $a > b > 0$ sao cho $f(a) = f(b) = c$.
Trong (6) cho $x = a$ và $y = b$ thì được: $f(a + c + b) = f(2a) + c$.
Trong (6) cho $x = b$ và $y = a$ thì được: $f(a + c + b) = f(2b) + c$.
So sánh 2 đẳng thức trên ta thấy: $f(2a) = f(2b)$. Lúc này trong (6) lần lượt cho $x = a$ và $x = b$ rồi so sánh 2 đẳng thức vừa thu được, sẽ có:

$$f(y + a + c) = f(y + b + c),\ \forall y > 0.$$

Đến đây thay y bởi $y - b - c$ và đặt $T = a - b > 0$ ta được:

$$f(y) = f(y + T),\ \forall y > b + c.$$

Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được:

$$f(y) = f(y + nT),\ \forall y > b + c,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Áp dụng đánh giá $f(x) \geq x,\ \forall x > 0$ cho vế phải của đẳng thức trên, ta được:

$$f(y) \geq y + nT,\ \forall y > b + c,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Đến đây chọn $y = b + c + 1$ và cho $n \to \infty$ ta có ngay điều vô lý. Do đó f phải là đơn ánh.
Trong (6) thay y bởi $2y$ thì được:

$$f\big(x + f(x) + 2y\big) = f(2x) + f(2y),\ \forall x, y > 0.$$

Đến đây đổi vị trí của x và y cho nhau rồi đối chiếu với đẳng thức cũ, ta thấy:

$$f\big(x + f(x) + 2y\big) = f\big(y + f(y) + 2x\big),\ \forall x, y > 0.$$

Lại có f là đơn ánh nên:

$$x + f(x) + 2y = y + f(y) + 2x,\ \forall x, y > 0$$
$$\Longrightarrow f(x) - x = f(y) - y,\ \forall x, y > 0.$$

Do đó $f(x) = x + c,\ \forall x > 0$, với c là hằng số. Cho $x \to 0^+$ với chú ý $f(x) > 0,\ \forall x > 0$, ta được $c \geq 0$. Thử lại, ta thấy tất cả hàm số có dạng $f(x) = x + c,\ \forall x > 0$, với c là hằng số không âm đều là nghiệm hàm của bài toán. □

Bình luận.
✓ Khác với bài toán trước, nghiệm hàm của bài toán này không phải chỉ là $f(x) = x,\ \forall x > 0$; vì thế không thể bắt chước ý tưởng "chặn hai đầu" $x \leq f(x) \leq x$ được.
✓ Kĩ thuật chứng minh f đơn ánh bằng cách xây dựng tính tuần hoàn và đánh giá $f(x) \geq x,\ \forall x > 0$ rất thường gặp trong các bài toán phương trình hàm trên tập hợp số thực dương. Tổng quát hơn, ta có kết quả sau.

Bổ đề 1

Xét hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ và giả sử tồn tại các số thực $a, b, c, d > 0$ sao cho

$$f(x) \geq cx, \forall x > 0 \text{ và } f(x+a) = f(x+b), \forall x > d.$$

Khi đó, ta phải có $a = b$.

Bài toán 4 (2021 Korea Winter Program Practice Test)

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x)f(2y) = 4f\big(x + yf(x)\big), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Lời giải. Trong đẳng thức trên thay y bởi $\dfrac{y}{2}$ ta được:

$$f(x)f(y) = 4f\left(x + \frac{yf(x)}{2}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{7}$$

Để triệt tiêu $f(y)$ và $f\left(x + \dfrac{yf(x)}{2}\right)$, ta cần chọn x, y sao cho:

$$y = x + \frac{yf(x)}{2} \iff y = \frac{2x}{2 - f(x)}.$$

Như vậy, nếu tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) < 2$ thì trong (7) ta cho $x = x_0$ và $y = \dfrac{2x_0}{2 - f(x_0)} > 0$ sẽ thu được: $f(x_0) = 4$, vô lí! Do đó $f(x) \geq 2, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$.
Trong (7) đổi vai trò của x và y cho nhau rồi so sánh với đẳng thức cũ, ta được:

$$f\left(x + \frac{yf(x)}{2}\right) = f\left(y + \frac{xf(y)}{2}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

$\boxed{\text{TH1:}}$ f là đơn ánh. Khi đó từ đẳng thức trên ta suy ra:

$$x + \frac{yf(x)}{2} = y + \frac{xf(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đến đây cho $y = 1$ thì được $f(x) = [f(1) - 2]x + 2, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$. Thay công thức này vào (7) ta không tìm được hàm f thỏa mãn.
$\boxed{\text{TH2:}}$ f không phải là đơn ánh, tức là tồn tại $a > b > 0$ sao cho $f(a) = f(b) = c$.
Trong (7) lần lượt cho $x = a$ và $x = b$ rồi so sánh 2 đẳng thức này, ta được:

$$f\left(a + \frac{cy}{2}\right) = f\left(b + \frac{cy}{2}\right), \ \forall y > 0$$
$$\implies f(y + a) = f(y + b), \ \forall y > 0.$$

Đặt $T = a - b > 0$ thì đẳng thức trên trở thành:

$$f(y) = f(y + T), \ \forall y > b.$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng suy ra:

$$f(x) = f(x + nT), \ \forall x > b, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Phân tích — Trong (7) ta đã dùng phép thế triệt tiêu $f(y)$ và $f\left(x+\dfrac{yf(x)}{2}\right)$ để chứng minh $f(x) \geq 2$. Tuy nhiên cách ta làm khá "ngây thơ": chỉ cho hai phần "lõi" bên trong bằng nhau. Còn giờ đây, khi đã có thêm sự kiện f là hàm tuần hoàn, ta có thể triệt tiêu hai đại lượng này bằng cách chọn $x, y > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$y + nT = x + \frac{yf(x)}{2} \iff y = \frac{2nT - 2x}{f(x) - 2}.$$

Để phép thế trên là hợp lệ, ta cần sự tồn tại của x_0 sao cho $f(x_0) > 2$ và chọn n đủ lớn để đảm bảo $y > b$. Từ đó ta lập luận tiếp như sau.

Giả sử tồn tại x_0 để $f(x_0) = 2$. Lúc này trong (7) cho $x = y = x_0$ ta được $f\left(x_0 + \dfrac{x_0 f(x_0)}{2}\right) = 1$, vô lý! Do đó $f(x) > 2,\ \forall x > 0$.
Bây giờ, với mỗi $x > 0$, ta lại chọn số tự nhiên n đủ lớn sao cho $2nT > 2x + b[f(x) - 2]$. Khi đó trong (7) cho $y = \dfrac{2nT - 2x}{f(x) - 2} > b$ thì được:

$$\begin{aligned} & f(x)f(y) = 4f(y + nT) \\ & \overset{(8)}{\Longrightarrow} f(x) = 4. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 4,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$. Thử lại thấy đúng. □

Bài toán 5 (Spain MO 2018)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\big(x + f(y)\big) = yf(xy + 1),\ \forall x, y > 0. \tag{9}$$

Lời giải. Thực hiện phép thế triệt tiêu $f\big(x + f(y)\big)$ và $f(xy + 1)$, ta chứng minh được:

$$\frac{f(y) - 1}{y - 1} \leq 0,\ \forall y > 0.$$

Hệ quả là

$$f(y) \leq 1,\ \forall y > 1. \tag{10}$$

Với mọi $x > 1$ và $y > 0$ thì $x + f(y) > 1$, vì thế theo (10) ta có $f\big(x + f(y)\big) \leq 1$. Lúc này kết hợp với (9) ta có:

$$f(xy + 1) \leq \frac{1}{y},\ \forall y > 0, x > 1.$$

Đến đây thay y bởi $\dfrac{y}{x}$ thì có:

$$f(y + 1) \leq \frac{x}{y},\ \forall y > 0, x > 1.$$

Đến đây cố định $y > 0$ và cho $x \to 1^+$ ta được: $\quad f(y + 1) \leq \dfrac{1}{y}$.

Do đó $f(y) \leq \dfrac{1}{y - 1},\ \forall y > 1$. Hơn nữa ta cũng có $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = 0$.

Áp dụng đánh giá trên cho vế phải của (9), ta được:

$$f\big(x+f(y)\big) \le y \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x},\ \forall x, y > 0.$$

Đến đây thay x bởi $x - f(y)$ thì được:

$$f(x) \le \frac{1}{x - f(y)},\ \forall y > 0, x > f(y). \tag{11}$$

Cố định $x > 0$, do $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = 0 < x$ nên tồn tại $c > 0$ sao cho $f(y) < x,\ \forall y > c$. Lúc này từ (11) ta có:

$$f(x) \le \frac{1}{x - f(y)},\ \forall y > c.$$

Đến đây cho $y \to +\infty$ với chú ý $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = 0$ thì được: $\quad f(x) \le \dfrac{1}{x}$. Do đó

$$f(x) \le \frac{1}{x},\ \forall x > 0. \tag{12}$$

Áp dụng đánh giá trên cho vế phải của (9), ta được:

$$f\big(x+f(y)\big) \le \frac{y}{xy+1} = \frac{1}{x + \dfrac{1}{y}},\ \forall x, y > 0.$$

Đến đây thay x bởi $x - f(y)$ thì được:

$$f(x) \le \frac{1}{x + \dfrac{1}{y} - f(y)},\ \forall y > 0, x > f(y).$$

Chú ý $f(y) \le \dfrac{1}{y},\ \forall y > 0$ nên ta viết lại đánh giá trên như sau:

$$f(y) \ge x - \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{y},\ \forall y > 0, x > \frac{1}{y}.$$

Điều này hoàn toàn tương đương với:

$$f(y) \ge x - \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{y},\ \forall x > 0, y > \frac{1}{x}. \tag{13}$$

Để thu được $f(y) \ge \dfrac{1}{y}$, ta sẽ cố gắng chứng minh $f(1) = 1$. Trong (9) cho $y = 1$ thì được:

$$f\big(x + f(1)\big) = f(x+1),\ \forall x > 0.$$

Từ (12) ta đã có $f(1) \le 1$. Giả sử phản chứng rằng $f(1) < 1$. Trong đẳng thức trên thay x bởi $x - f(1)$ và đặt $T = 1 - f(1) > 0$ thì có:

$$f(x) = f(x+T),\ \forall x > 1 > f(1).$$

Trong (9) thay x bởi $x + T$ và sử dụng tính chất trên thì được:

$$f\big(x + f(y)\big) = yf(xy + 1 + Ty),\ \forall y > 0, x > 1.$$

Đối chiếu với (9) ta thấy:

$$f(xy+1) = f(xy+1+Ty),\ \forall y > 0,\ x > 1.$$

Đến đây thay x bởi $\dfrac{x-1}{y}$ và y bởi $\dfrac{y}{T}$ thì được:

$$f(x) = f(x+y),\ \forall y > 0,\ x > y+1.$$

Với hai số $y > 0$ và $x > 1$ tùy ý, ta chọn số nguyên dương n (đủ lớn) sao cho $x + nT > y + 1$. Khi đó, từ đẳng thức trên và tính tuần hoàn của f trên $(1, +\infty)$, ta suy ra:

$$f(x) = f(x+nT) = f(x+nT+y) = f(x+y).$$

Nói tóm lại, ta thu được

$$f(x) = f(x+y),\ \forall y > 0,\ x > 1.$$

Đổi vai trò của x và y cho nhau rồi đối chiếu với đẳng thức cũ, ta được $f(x) = f(y),\ \forall x, y > 1$. Như vậy f là hàm hằng trên $(1, +\infty)$. Điều này là vô lý vì $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 0$. Điều vô lý ấy chứng tỏ $f(1) = 1$.
Giờ đây, ta sẽ thay $x = 1$ vào (13):

$$f(y) \geq \frac{1}{y},\ \forall y > 1. \tag{14}$$

Kết hợp với (12) ta được $f(y) = \dfrac{1}{y},\ \forall y > 1$. Cuối cùng, cho $x = 1$ vào (9) và sử dụng kết quả trên thì được:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f(y)+1} = \frac{y}{y+1},\ \forall y > 0\\
&\Longrightarrow f(y) = \frac{1}{y},\ \forall y > 0.
\end{aligned}$$

Thử lại thấy đúng. Vậy bài toán có duy nhất một nghiệm hàm là $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \forall x > 0.$ □

> **Bình luận.** Trên đây là một lời giải được nhóm tác giả thực hiện với mong muốn thể hiện rõ nét tinh thần của bài viết: sử dụng các đánh giá thu được từ phép thế triệt tiêu để giải quyết bài toán. Để thấy được nhiều góc nhìn thú vị khác xung quanh bài toán này, độc giả có thể tìm đọc bài viết "*Sáu lời giải cho một bài toán phương trình hàm*" của tác giả Nguyễn Tài Chung, được đăng trong Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ số 540 (Tháng 6–2022).

Bài toán 6 (Komal A.725)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\left(xy + f(y)^2\right) = f(x)f(y) + yf(y),\ \forall x, y > 0. \tag{15}$$

Lời giải. Ta viết lại (15) như sau:

$$f\left(xy + f(y)^2\right) = [f(x) + y] \cdot f(y),\ \forall x, y > 0.$$

Phân tích — Đến đây ta nghĩ đến việc triệt tiêu $f\left(xy+f(y)^2\right)$ và $f(y)$, tức là thay $x = 1 - \dfrac{f(y)^2}{y}$ vào đẳng thức trên, thu được:

$$1 = f\left(1 - \frac{f(y)^2}{y}\right) + y > y.$$

Điều này chứng tỏ rằng: nếu tồn tại $y > 0$ sao cho $1 - \dfrac{f(y)^2}{y} > 0$ thì chỉ có thể là $y < 1$. Nói cách khác, ta có

$$f(y) \geq \sqrt{y},\ \forall y \geq 1. \tag{16}$$

Trong (15) cho $y = 1$ và đặt $a = f(1)$ thì được:

$$f\left(x + a^2\right) = af(x) + a,\ \forall x > 0.$$

Để tận dụng kết quả trên, ta thế "tịnh tiến" x bởi $x + \dfrac{a^2}{y}$ vào (15):

$$\begin{aligned}
af\left(xy + f(y)^2\right) + a &= f\left(x + \frac{a^2}{y}\right) f(y) + yf(y),\ \forall x, y > 0 \\
\overset{(15)}{\Longrightarrow} af(x)f(y) + ayf(y) + a &= f\left(x + \frac{a^2}{y}\right) f(y) + yf(y),\ \forall x, y > 0 \\
\Longrightarrow f(x) + (a-1)y + \frac{a}{f(y)} &= f\left(x + \frac{a^2}{y}\right),\ \forall x, y > 0.
\end{aligned}$$

Đến đây ta hi vọng sẽ tìm được a. Chú ý rằng từ (16) ta suy ra $a = f(1) \geq \sqrt{1} = 1$, vì vậy ta chỉ cần giả sử phản chứng $a > 1$. Hơn nữa từ đẳng thức trên, ta có:

$$f\left(x + \frac{a^2}{y}\right) > (a-1)y,\ \forall x, y > 0.$$

Đến đây thay y bởi $\dfrac{a^2}{y}$ thì được:

$$f(x+y) > \frac{a^2(a-1)}{y},\ \forall x, y > 0.$$

Trong đánh giá trên, cho $x = 1 - y$ thì được:

$$1 > \frac{a(a-1)}{y},\ \forall y \in (0, 1).$$

Đến đây nếu cho $y \to 0^+$ thì ta có ngay điều vô lý! Thành thử $a = f(1) = 1$.
Như vậy, các kết quả trước đó trở thành:

$$\begin{gathered}
f(x+1) = f(x) + 1,\ \forall x > 0; \\
f(x) + \frac{1}{f(y)} = f\left(x + \frac{1}{y}\right),\ \forall x, y > 0.
\end{gathered}$$

Từ hai đẳng thức trên ta thu được f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}^+$. Vì vậy, theo kết quả của phương trình hàm Cauchy, ta có $f(x) = xf(1) = x,\ \forall x > 0$. Thử lại thấy đúng.
Vậy $f(x) = x,\ \forall x > 0$ là nghiệm hàm duy nhất của bài toán. □

Tiếp theo ta xét đến một bài toán có kĩ thuật xử lý khá lạ sau đây.

Bài toán 7 (Trường Đông Vinh 2023–2024)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho:

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + \frac{2x^3 f(y)}{f(x)} + f\left(y^2\right), \ \forall x, y > 0. \tag{17}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Từ (17) ta dễ dàng có:

$$f\big(x + f(y)\big) = f\left(y^2\right), \ \forall x, y > 0.$$

Giả sử phản chứng, tồn tại $y_0 > 0$ sao cho $y_0^2 > f(y_0)$. Khi đó thay $y = y_0$ và $x = y_0^2 - f(y_0) > 0$ $\big($khi đó $x + f(y_0) = y_0^2\big)$ vào bất đẳng thức trước đó thì được: $f\left(y_0^2\right) > f\left(y_0^2\right)$, vô lý!
Do đó $f(y) \geq y^2$, $\forall y > 0$. Lúc này, trong (17) ta cho $y = 1$ và sử dụng đánh giá trên thì có:

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{2x^3 f(1)}{f(x)} + f(1) &= f\big(x + f(1)\big) \\ &\geq [x + f(1)]^2, \ \forall x > 0. \end{aligned}$$

Đến đây, không còn gì hợp lý hơn là cho $x = 1$, thu được:

$$2 \geq f(1)^2 + 1 \Longrightarrow f(1) \leq 1.$$

Mặt khác $f(1) \geq 1$ (do $f(y) \geq y^2$, $\forall y > 0$) nên $f(1) = 1$. Trong (17) cho $y = 1$ thì được:

$$f(x+1) = f(x) + \frac{2x^3}{f(x)} + 1, \ \forall x > 0.$$

Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được

$$f(n) = n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Trong (17) cho $y = n$ thì được:

$$\begin{aligned} f\left(x + n^2\right) &= f(x) + \frac{2x^3 n^2}{f(x)} + n^4, \ \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^* \\ \Longrightarrow f\left(x + n^2\right) - \left(x + n^2\right)^2 &= \left[f(x) - x^2\right] \cdot \frac{f(x) - 2xn^2}{f(x)}, \ \forall x > 0, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Kí hiệu $\mathscr{R}$ và $\mathscr{L}$ lần lượt là vế phải và vế trái của đẳng thức trên. Với mỗi $x > 0$, ta chọn $n \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn sao cho $f(x) - 2xn^2 < 0$, thế thì $\mathscr{L} \geq 0$ còn $\mathscr{R} \leq 0$. Do đó $\mathscr{L} = \mathscr{R}$ khi và chỉ khi $f(x) = x^2$.
Do đó $f(x) = x^2$, $\forall x > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán là $f(x) = x^2$, $\forall x > 0$. $\square$

Bình luận. Bên dưới là một bài toán được xây dựng từ ý tưởng trên:

Mở rộng: Tìm số thực dương m nhỏ nhất để tồn tại duy nhất hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) + \frac{m x^5 f(y)}{f(x)^2} + f\left(y^2\right), \ \forall x, y > 0.$$

§1.2 Kĩ thuật triệt tiêu "gián tiếp"

Có những bài toán mà việc triệt tiêu những biểu thức f ở hai vế rất khó khăn hoặc không dễ thực hiện. Ta cần một số nhận xét, đánh giá ban đầu mới có thể biết cần phải triệt tiêu những đại lượng nào. Ta cùng nhau thảo luận các ví dụ dưới đây.

Bài toán 8

Tìm tất cả cặp hàm số (f, P) với $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ và P là đa thức khác hằng, có tất cả hệ số đều không âm sao cho đẳng thức dưới đây đúng:

$$f\big(xy + f(x)\big) = f\big(yf(x)\big) + P(x),\ \forall x, y > 0. \tag{18}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại đa thức P và hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Mệnh đề 1.1

$f(x) \le x,\ \forall x > 0.$

Chứng minh. Nếu tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) > x_0$ thì trong (18) cho $x = x_0$ và $y = \dfrac{f(x_0)}{f(x_0) - x_0} > 0$ sẽ có:

$$f\left(\frac{f(x_0)^2}{f(x_0) - x_0}\right) = f\left(\frac{f(x_0)^2}{f(x_0) - x_0}\right) + P(x_0) \Longrightarrow P(x_0) = 0,\ \text{vô lý!}$$

Do đó $f(x) \le x,\ \forall x > 0.$ □

Mặt khác từ (18) ta có $f\big(xy + f(x)\big) > P(x),\ \forall x, y > 0$. Vì vậy, theo Mệnh đề 1.1 ta có:

$$P(x) \le xy + f(x) \le xy + x,\ \forall x, y > 0.$$

Đến đây cho $y \to 0^+$ thì được:

$$P(x) \le x,\ \forall x > 0. \tag{19}$$

Như vậy P chỉ có thể là đa thức bậc nhất. Giả sử $P(x) = ax + b$, trong đó $a > 0$ và $b \ge 0$. Thay vào (18) ta được:

$$ax + b \le x,\ \forall x > 0.$$

Đến đây cho $x \to 0^+$ ta được $b \le 0$, dẫn đến $b = 0$. Như vậy, nhiệm vụ còn lại lúc này là tìm hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\big(xy + f(x)\big) = f\big(yf(x)\big) + ax,\ \forall x, y > 0. \tag{20}$$

Sau đây ta trình bày hai lời giải cho bài toán trên.
Cách 1. Hiện tại trong (20) không còn gì để ta thực hiện thế triệt tiêu thêm lần nữa. Ta cần có ý tưởng đột phá hơn sau đây: Từ (20) ta dễ dàng có

$$f\big(xy + f(x)\big) > ax,\ \forall x, y > 0. \tag{21}$$

Phân tích — Do đã có Mệnh đề 1.1 nên nếu chọn được $x, y > 0$ sao cho $xy + f(x) = ax$ thì thay vào (21) ta sẽ thu được điều vô lý. Ý tưởng này cho ta nhận xét sau.

Mệnh đề 1.2

$f(x) \geq ax, \ \forall x > 0.$

Chứng minh. Giả sử tồn tại tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) < ax_0$. Khi đó trong (20) cho $x = x_0$ và $y = \dfrac{ax_0 - f(x_0)}{x_0} > 0$ thì được: $f(ax_0) > ax_0$, trái với Mệnh đề 1.1. Do đó $f(x) \geq ax, \ \forall x > 0$. $\square$

Trở lại bài toán: Ta sẽ chứng minh $f(x) = x, \ \forall x > 0$ bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $c > 0$ sao cho $s = \dfrac{c}{f(c)} > 1$. Trong (20) cho $x = c$ và thay y bởi $\dfrac{y}{f(c)}$ thì được:

$$f\big(sy + f(c)\big) = f(y) + ac, \ \forall y > 0. \tag{22}$$

Áp dụng Mệnh đề 1.2 cho vế trái của (22) ta được:

$$\begin{aligned} &f(y) + ac \geq a[sy + f(c)], \ \forall y > 0 \\ \Longrightarrow\ &f(y) \geq asy + a[f(c) - c], \ \forall y > 0. \end{aligned}$$

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng:

$$f(y) \geq as^n y + a[f(c) - c], \ \forall y > 0, \forall n \geq 1.$$

Khẳng định trên đã đúng với $n = 1$. Giả sử ta đã có $f(y) \geq as^k y + a[f(c) - c], \ \forall y > 0$, với $k \geq 1$ nào đó. Áp dụng đánh giá này cho vế trái của (22) ta được:

$$\begin{aligned} &f(y) + ac \geq as^k[sy + f(c)] + a[f(c) - c], \ \forall y > 0 \\ \Longrightarrow\ &f(y) \geq as^{k+1}y + a\left[s^k f(c) - c\right] + a[f(c) - c], \ \forall y > 0. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $s^k f(c) - c = f(c)\left[s^k - \dfrac{c}{f(c)}\right] = f(c)\left(s^k - s\right) > 0$ (do $s > 1$), dẫn đến là

$$f(y) \geq as^{k+1}y + a[f(c) - c], \ \forall y > 0.$$

Như vậy khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Do đó, theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận:

$$f(y) \geq as^n y + a[f(c) - c], \ \forall y > 0, \forall n \geq 1.$$

Đến đây thay $y = 1$ và cho $n \to +\infty$, với chú ý $s > 1$, ta được: $f(1) \geq +\infty$, vô lý! Điều này chứng tỏ không tồn tại $c > 0$ sao cho $\dfrac{c}{f(c)} > 1$. Nói cách khác, $f(x) \geq x, \ \forall x > 0$.

Kết hợp với Mệnh đề 1.1, ta suy ra $f(x) = x, \ \forall x > 0$. Thay công thức này vào (20) ta được:

$$xy + x = xy + ax, \ \forall x, y > 0 \Longrightarrow a = 1.$$

Vậy chỉ có duy nhất một cặp hàm số (f, P) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $P(x) = f(x) = x, \ \forall x > 0$.

Cách 2. Nếu không phát hiện ra Mệnh đề 1.2, ta vẫn có thể giải tiếp bài toán như sau: Đầu tiên ta chứng minh f là đơn ánh. Giả sử tồn tại các số thực dương $s > t$ sao cho $f(s) = f(t) = c$. Trong (20) lần lượt cho $x = s$ và $x = t$ rồi so sánh 2 đẳng thức thu được, ta thấy:

$$f(sy + c) - as = f(ty + c) - at, \ \forall y > 0.$$

Đến đây thay y bởi $\frac{y}{s}$ thì được:

$$f(y+c) = f\left(\frac{t}{s}\cdot y + c\right) + a(s-t),\ \forall y > 0.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được:

$$f(y+c) = f\left(\left(\frac{t}{s}\right)^n \cdot y + c\right) + n\cdot a(s-t),\ \forall y>0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây ta có ngay:

$$f(y+c) > n\cdot a(s-t),\ \forall y > 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Đến đây cố định $y > 0$ và cho $n \to +\infty$ với chú ý $s-t>0$, ta có ngay điều vô lý! Do vậy f phải là đơn ánh.
Trong (20) thay y bởi $\frac{y}{f(x)}$ thì được:

$$f\left(\frac{xy}{f(x)} + f(x)\right) = f(y) + ax,\ \forall x,y>0. \tag{23}$$

Đến đây thay x bởi $x+z$ thì được:

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{xy+yz}{f(x+z)} + f(x+z)\right) = [f(y)+ax] + az,\ \forall x,y,z>0\\
\overset{(23)}{\Longrightarrow}\ & f\left(\frac{xy+yz}{f(x+z)} + f(x+z)\right) = f\left(\frac{xy}{f(x)} + f(x)\right) + az,\ \forall x,y,z>0\\
\overset{(23)}{\Longrightarrow}\ & f\left(\frac{xy+yz}{f(x+z)} + f(x+z)\right) = f\left(\frac{xyz}{f(x)f(z)} + \frac{zf(x)}{f(z)} + f(z)\right),\ \forall x,y,z>0.
\end{aligned}$$

Lại có f là đơn ánh nên từ đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned}
& \frac{xy+yz}{f(x+z)} + f(x+z) = \frac{xyz}{f(x)f(z)} + \frac{zf(x)}{f(z)} + f(z),\ \forall x,y,z>0\\
\Longrightarrow\ & y\left[\frac{x+z}{f(x+z)} - \frac{xz}{f(x)f(z)}\right] = \frac{zf(x)}{f(z)} + f(z) - f(x+z),\ \forall x,y,z>0.
\end{aligned}$$

Do đẳng thức trên đúng với mọi $y>0$ nên ta phải có:

$$\frac{x+z}{f(x+z)} = \frac{xz}{f(x)f(z)},\ \forall x,z>0 \tag{24}$$

$$\text{và}\quad \frac{zf(x)}{f(z)} + f(z) = f(x+z),\ \forall x,z>0. \tag{25}$$

Đặt $g(x) = \frac{x}{f(x)},\ \forall x>0$ thì (24) trở thành:

$$\begin{aligned}
& g(x+z) = g(x)g(z),\ \forall x,z>0\\
\Longrightarrow\ & \ln g(x+z) = \ln g(x) + \ln g(z),\ \forall x,z>0.
\end{aligned}$$

Như vậy hàm $\ln g(x)$ cộng tính trên $\mathbb{R}^+$. Mặt khác, theo Mệnh đề 1.1 ta có $g(x)\ge 1,\ \forall x>0$, dẫn đến $\ln g(x) \ge 0,\ \forall x > 0$. Do đó theo kết quả của phương trình hàm Cauchy, ta suy ra $\ln g(x) = cx,\ \forall x>0$ (c là hằng số không âm). Dẫn đến $f(x) = \frac{x}{e^{cx}},\ \forall x>0$. Thay công thức này vào (25) ta tìm được $c=0$, hay $f(x)=x,\ \forall x>0$.
Cuối cùng, thay công thức trên vào (20) ta tìm được $a=1$.
Vậy có duy nhất một cặp hàm số (f,P) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $P(x)=f(x)=x,\ \forall x>0$. □

Bài toán 9

Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{x^2}{y+1}+f(y)\right)=\frac{xf(x)}{f(y)+1}+y,\ \forall x,y>0. \tag{26}$$

Lời giải. Nếu nói hàm f thỏa mãn (26) có tính chất $f(x)\geq x,\ \forall x>0$ thì có lẽ bạn đọc sẽ có chút nghi ngại. Từ giả thiết ta dễ dàng có:

$$f\left(\frac{x^2}{y+1}+f(y)\right)>y,\ \forall x,y>0.$$

Đến đây thay x bởi $\sqrt{x(y+1)}$ thì được:

$$f\big(x+f(y)\big)>y,\ \forall x,y>0. \tag{27}$$

Phân tích — Bước ngoặt của bài toán chỉ thực sự xuất hiện nếu ta đặt ra câu hỏi:

"Nếu $x+f(y)=y$ thì sao?"

Giả sử phản chứng, tồn tại $y_0>0$ sao cho $f(y_0)<y_0$. Lúc này thay $y=y_0$ và $x=y_0-f(y_0)>0$ vào (27) , ta được $f(y_0)>y_0$, mâu thuẫn với giả sử! Do đó $f(y)\geq y,\ \forall y>0$.
Sử dụng đánh giá trên cho vế trái của (26), ta được:

$$\frac{xf(x)}{f(y)+1}+y\geq\frac{x^2}{y+1}+f(y),\ \forall x,y>0.$$

Đến đây cho $y=x$ thì có:

$$\begin{aligned}\frac{xf(x)}{f(x)+1}+x&\geq\frac{x^2}{x+1}+f(x),\ \forall x>0\\ \Longrightarrow [f(x)-x]\cdot\underbrace{\frac{-xf(x)-f(x)-1}{[f(x)+1](x+1)}}_{<0}&\geq 0,\ \forall x>0.\end{aligned}$$

Do đó $f(x)-x\leq 0,\ \forall x>0$, hay $f(x)\leq x,\ \forall x>0$. Mà ở trên ta đã chứng minh được $f(x)\geq x,\ \forall x>0$ nên $f(x)=x,\ \forall x>0$. Thử lại thấy đúng.
Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu bài toán là $f(x)=x,\ \forall x>0$. □

Tiếp theo là một bài toán rất thử thách như sau:

Bài toán 10 (Trường Đông Vinh 2025–2026)

Tìm tất cả số thực $m\geq 0$ sao cho tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\left(xy+\frac{f(x)}{x}\right)=f\left(\frac{f(x)f(y)}{xy}\right)+x^2\left[m\sqrt{f(y)}+1\right],\ \forall x,y>0. \tag{28}$$

Lời giải. Xét số $m \geq 0$ sao cho tồn tại hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn (28). Ta dễ dàng có:

$$f\left(xy + \frac{f(x)}{x}\right) > x^2, \ \forall x, y > 0. \tag{29}$$

Cũng tương tự với bài trước, ta thử chuyển biểu thức $xy + \dfrac{f(x)}{x}$ thành x. Ý tưởng này cho ta nhận xét sau.

Mệnh đề 1.3

$f(x) \geq x^2, \ \forall x > 0.$

Chứng minh. Nếu tồn tại $x_0 > 0$ để mà $f(x_0) < x_0^2$ thì bằng cách thay $x = x_0$ và $y = \dfrac{x_0^2 - f(x_0)}{x_0^2} > 0$ vào (29), ta được $f(x_0) > x_0^2$, mâu thuẫn với giả sử. Vì thế $f(x) \geq x^2, \ \forall x > 0.$ □

Bình luận. Chứng minh cho Mệnh đề 1.3 có nét tương tự với việc chứng minh $f(y) \geq y, \ \forall y > 0$ ở bài trước đó – rõ ràng là không dễ để nghĩ đến. Sau đây là một hướng tiếp cận có phần tự nhiên hơn: Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}, \ \forall x > 0$. Lúc này (29) trở thành:

$$[xy + g(x)] \cdot g\left(xy + g(x)\right) > x^2, \ \forall x, y > 0.$$

Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $x_0 > g(x_0)$. Lúc này ta thay $x = x_0$ và $y = y_0 = \dfrac{x_0 - g(x_0)}{x_0} > 0$ vào bất đẳng thức trước đó thì được:

$$x_0 \cdot g(x_0) > x_0^2 \Longrightarrow g(x_0) > x_0, \ \text{vô lý!}$$

Điều vô lý ấy chứng tỏ $g(x) \geq x, \ \forall x > 0$. Nói cách khác, $f(x) \geq x^2, \ \forall x > 0$.

Áp dụng Mệnh đề 1.3 liên tiếp ta được:

$$f\left(\frac{f(x)f(y)}{xy}\right) \geq \frac{f(x)^2}{x^2} \cdot \frac{f(y)^2}{y^2} \geq \frac{f(x)^2}{x^2} \cdot \frac{y^2 f(y)}{y^2} = \frac{f(x)^2}{x^2} \cdot f(y), \ \forall x, y > 0.$$

Kết hợp với (28) ta được:

$$f\left(xy + \frac{f(x)}{x}\right) > \frac{f(x)^2}{x^2} \cdot f(y), \ \forall x, y > 0. \tag{30}$$

Đến đây, ta thử chọn $x, y > 0$ thỏa mãn:

$$y = xy + \frac{f(x)}{x} \iff y = \frac{(1-x)f(x)}{x}.$$

Phép thế trên chỉ hợp lệ nếu $x \in (0, 1)$. Từ đó ta có nhận xét sau.

Mệnh đề 1.4

$f(x) < x, \ \forall x \in (0, 1)$. Hệ quả là $f(x) < 1, \ \forall x \in (0, 1)$.

Chứng minh. Xét $x_0 \in (0,1)$ bất kỳ, ta thay $x = x_0$ và $y = y_0 = \dfrac{(1-x_0)f(x_0)}{x_0} > 0$ vào (30) thì có:

$$f(y_0) > \frac{f(x_0)^2}{x_0^2} \cdot f(y_0) \Longrightarrow x_0 > f(x_0).$$

Do đó $f(x) < x < 1,\ \forall x \in (0,1)$. □

Ký hiệu $\mathscr{L}$ và $\mathscr{R}$ lần lượt là vế trái và vế phải của phương trình (28).
Trong (28) ta xét $x, y \in (0,1)$ thì có $\dfrac{f(x)}{x}, \dfrac{f(y)}{y} \in (0,1)$ (do Mệnh đề 1.4), dẫn đến $\dfrac{f(x)f(y)}{xy} \in (0,1)$.
Lúc này, theo Mệnh đề 1.4, ta có:

$$\mathscr{R} < \frac{f(x)f(y)}{xy} + (m\sqrt{y}+1)\,x^2,\ \forall x, y \in (0,1).$$

Mặt khác theo Mệnh đề 1.4 ta lại có:

$$\mathscr{L} \geq \left[xy + \frac{f(x)}{x}\right]^2,\ \forall x, y \in (0,1).$$

Từ hai đánh giá trên, ta được:

$$\left[xy + \frac{f(x)}{x}\right]^2 < \frac{f(x)f(y)}{xy} + (m\sqrt{y}+1)\,x^2,\ \forall x, y \in (0,1). \tag{31}$$

Đến đây, nếu muốn cho $y \to 0^+$ thì cần tính được $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{f(y)}{y}$ trước.

Mệnh đề 1.5

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$

Chứng minh. Lấy $x_0 \in (0,1)$ bất kỳ. Khi đó theo Mệnh đề 1.4, ta có $r = \dfrac{x_0 - f(x_0)}{x_0^2} > 0$. Hơn nữa, với mọi $y < r$ thì $x_0 y + \dfrac{f(x_0)}{x_0} < 1$, vì thế theo Mệnh đề 1.4 thì $f\left(x_0 y + \dfrac{f(x_0)}{x_0}\right) < 1$. Áp dụng kết quả này vào (28), ta được:

$$1 > f\left(\frac{f(x_0)f(y)}{x_0 y}\right) + x_0^2,\ \forall y \in (0,r).$$

Áp dụng Mệnh đề 1.3 cho vế phải của đánh giá trên, ta được:

$$1 > \left[\frac{f(x_0)f(y)}{x_0 y}\right]^2 + x_0^2 \geq \left[\frac{x_0^2 f(y)}{x_0 y}\right]^2 + x_0^2 = x_0^2\left[\frac{f(y)^2}{y^2} + 1\right],\ \forall y \in (0,r).$$

Suy ra:

$$\frac{1}{x_0^2} - 1 > \frac{f(y)^2}{y^2},\ \forall y \in (0,r).$$

Trên đây ta lấy $x_0 \in (0,1)$ bất kỳ, vì vậy ta thu được

$$\frac{f(y)}{y} < \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}, \ \forall x \in (0,1), \ y \in \left(0, \frac{x - f(x)}{x^2}\right). \tag{32}$$

Với mỗi $\varepsilon > 0$ bất kỳ, ta hoàn toàn chọn được $s \in (0,1)$ sao cho $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{s^2} - 1}$. Lúc này, thay $x = s$ vào (32) và đặt $\delta = \frac{s - f(s)}{s^2} > 0$ (chú ý $s \in (0,1)$ nên $f(s) < s$), ta được:

$$\left|\frac{f(y)}{y} - 0\right| < \varepsilon, \ \forall y \in (0, \delta).$$

Do đó, theo định nghĩa giới hạn, ta có $\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{f(y)}{y} = 0$. □

Lúc này đây, trong (31) ta cho $y \to 0^+$ thì được:

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2 \leq x^2, \ \forall x \in (0,1) \Longrightarrow f(x) \leq x^2, \ \forall x \in (0,1).$$

Kết hợp với Mệnh đề 1.4 ta được $f(x) = x^2, \ \forall x \in (0,1)$. Lúc này, trong (28) ta cố định $y > 0$ và chọn $x \in (0,1)$ đủ nhỏ sao cho

$$\begin{cases} xy + \dfrac{f(x)}{x} & < 1 \\ \dfrac{f(x)f(y)}{xy} & < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy + x & < 1 \\ x \cdot \dfrac{f(y)}{y} & < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow x < \min\left\{\frac{1}{y+1}, \frac{y}{f(y)}\right\}$$

thì (28) trở thành:

$$\begin{aligned} (xy + x)^2 &= x^2 \cdot \frac{f(y)^2}{y^2} + x^2\left[m\sqrt{f(y)} + 1\right] \\ \Longrightarrow (y+1)^2 &= \frac{f(y)^2}{y^2} + m\sqrt{f(y)} + 1. \end{aligned}$$

Trên đây ta lấy $y > 0$ bất kỳ, vì vậy ta có

$$(y+1)^2 = \frac{f(y)^2}{y^2} + m\sqrt{f(y)} + 1, \ \forall y > 0.$$

Đến đây chọn $y \in (0,1)$ thì tìm được $m = 2$. Thay ngược trở lại, ta được:

$$y^2 + 2y = \frac{f(y)^2}{y^2} + 2\sqrt{f(y)}, \ \forall y > 0.$$

Rõ ràng với mọi $y > 0$ thì $y^2 \leq \frac{f(y)^2}{y^2}$ và $2y \leq 2\sqrt{f(y)}$. Vì vậy đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi $f(y) = y^2, \ \forall y > 0$. Thử lại thấy đúng.
Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm. Hơn nữa, ứng với $m = 2$ ta tìm được duy nhất một hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = x^2, \ \forall x > 0$. □

Bình luận. Thử thách lớn nhất ở bài toán này nằm ở việc phát hiện và chứng minh Mệnh đề 1.5. Sau khi thu được kết quả này, ta có thể xử lý tiếp bài toán một cách ngắn gọn và tinh tế hơn mà không cần phải tìm công thức của $f(x)$ trên $(0,1)$ trước, cụ thể như sau.
Cách 2 (dựa trên ý tưởng của một bạn học sinh):
Trong (28) ta cố định $x>0$ bất kỳ và áp dụng Mệnh đề 1.3 cho vế trái, thu được:

$$\left[xy+\frac{f(x)}{x}\right]^2 \le f\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(y)}{y}\right)+x^2\left[m\sqrt{f(y)}+1\right],\ \forall y>0. \tag{33}$$

Theo Mệnh đề 1.5 thì $\lim\limits_{y\to 0^+}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(y)}{y}\right]=0$. Mặt khác, từ Mệnh đề 1.4 ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ (theo Nguyên lý kẹp), thành thử $\lim\limits_{y\to 0^+} f\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(y)}{y}\right)=0$. Với tất cả những nhận xét trên, ta cho $y\to 0^+$ trong (33) thì sẽ có:

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2\le x^2 \Longrightarrow f(x)\le x^2.$$

Trên đây ta xét $x>0$ tùy ý, vì vậy $f(x)\le x^2,\ \forall x>0$. Kết hợp với Mệnh đề 29, ta được $f(x)=x^2,\ \forall x>0$.

Để kết thúc bài viết này, ta xét ba bài toán sau đây (ta sẽ đi trực tiếp vào lời giải chứ không phân tích chi tiết như những bài toán trên).

Bài toán 11 (Phát triển từ đề thi Silk Road 2005)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn đồng thời các tính chất sau:

(i) $f(2x)\ge 2f(x),\ \forall x>0$;

(ii) $f\big(f(x)f(y)+x\big)=f\big(xf(y)\big)+f(x)$ với mọi $x,y>0$.

Lời giải. Theo (i) thì hàm số $f(x)$ không bị chặn trên vì với mọi số nguyên dương n thì

$$f\left(2^n\right)\ge 2f\left(2^{n-1}\right)\ge\ldots\ge 2^nf(1) \implies \lim_{n\to\infty}2^nf(1)=+\infty.$$

Theo (ii) thì $f\big(f(x)f(y)+x\big)>f\big(xf(y)\big),\ \forall x,y>0$ nên

$$f(x)f(y)+x>xf(y),\ \forall x,y>0 \implies f(y)[x-f(x)]<x,\ \forall x,y>0.$$

Nếu tồn tại $x_0>0$ để $x_0-f(x_0)>0$ thì từ đánh giá trên, ta có $f(y)<\dfrac{x_0}{x_0-f(x_0)}$ với mọi $y>0$, kéo theo f bị chặn trên, mâu thuẫn! Do đó, ta luôn có $f(x)\ge x,\ \forall x>0$. $(*)$
Tiếp theo, ta đặt $a=f(1)$. Trong (ii) ta thay $x=y=1$ thì có $f\left(a^2+1\right)=f(a)+a$. Mà $a^2+1\ge 2a$ nên theo tính tăng ngặt của f, ta có

$$f\left(a^2+1\right)\ge f(2a)\overset{\text{(i)}}{\ge}2f(a).$$

Từ đó có $a\ge f(a)$, vì thế đẳng thức phải xảy ra. Do đó $a=1$ hay $f(1)=1$.
Cuối cùng, trong (ii) ta thay $y=1$ thì được

$$f\big(f(x)+x\big)=2f(x)\overset{\text{(i)}}{\le}f(2x),\ \forall x>0.$$

Lúc này, theo tính tăng ngặt của f, ta có $f(x)+x\le 2x$ hay $f(x)\le x,\ \forall x>0$. Kết hợp với $(*)$ ta được $f(x)=x,\ \forall x>0$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.
Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=x,\ \forall x>0$. □

Bài toán 12 (Chọn đội tuyển TP. HCM 2024-2025)
Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

(i) $f(2024x^2) \leq 2024f(g(x))$ với mọi $x > 0$;

(ii) $f(x+y^2) \geq f(g(y)) + \dfrac{y^2 f(x)^3}{g(yf(x))}$ với mọi $x, y > 0$.

Lời giải. Trước hết, ta thấy nếu tồn tại $y_0 > 0$ để $g(y_0) > y_0^2$ thì bằng cách thay $x = g(y_0) - y_0^2$ (khi đó $x + y_0^2 = g(y_0)$) vào (ii), ta có $\dfrac{y_0^2 f(x)^3}{g(y_0 f(x))} \leq 0$, vô lý! Vì thế nên $g(y) \leqslant y^2$ với mọi $y > 0$.

Khi đó, cũng từ (i), ta có

$$f\left(x+y^2\right) \geqslant f(g(y)) + \frac{y^2 f(x)^3}{y^2 f(x)^2} \geqslant f(g(y)) + f(x),\ \forall x, y > 0.$$

Suy ra $f\left(x+y^2\right) > f(x),\ \forall x, y > 0$, hay f là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$. Ngoài ra, ta cũng có

$$f\left(x+2y^2\right) = f(x+y^2+y^2) \geq f(g(y)) + f\left(x+y^2\right) \geq 2f(g(y)) + f(x),\ \forall x, y > 0.$$

Như vậy, bằng quy nạp, ta thu được

$$f\left(x+ny^2\right) \geq f(x) + nf\big(g(y)\big),\ \forall x, y > 0,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{34}$$

Từ đây ta có ngay $f(x+2024y^2) \geq 2024f(g(y)) + f(x)$ với mọi $x, y > 0$. Kết hợp với (i), ta có

$$f(x+2024y^2) \geq f(2024y^2) + f(x),\ \forall x, y > 0.$$

Nói cách khác, $f(x+y) \geq f(x) + f(y),\ \forall x, y > 0$. Hệ quả là

$$f(2024x) \geq 2024f(x),\ \forall x > 0.$$

Mặt khác $g(x) \leq x^2,\ \forall x > 0$ và f tăng ngặt nên từ (i), ta có

$$f\left(2024x^2\right) \leq 2024f\big(g(x)\big) \leq 2024f\left(x^2\right),$$

hay $f(2024x) \leq 2024f(x)$ với mọi $x > 0$. Vì thế nên đẳng thức phải xảy ra, tức là

$$f(2024x) = 2024f(x) \text{ và } g(x) = x^2,\ \forall x > 0.$$

Với $n \in \mathbb{Z}^+$ tuỳ ý, ta chọn $m \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $n < 2024^m$. Khi đó với mỗi $x > 0$ thì

$$\begin{aligned} 2024^m f(x) &= f\left(2024^m x\right) = f\left(nx + (2024^m - n)x\right) \geq nf(x) + (2024^m - n)f(x) \\ &= 2024^m f(x). \end{aligned}$$

Như vậy đẳng thức phải xảy ra, tức là $f(nx) = nf(x)$ với mọi $x > 0, n \in \mathbb{Z}^+$. $(*)$

Đặt $a = f(1)$, trong $(*)$ ta cho $x = \dfrac{1}{n}$ thì có $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{a}{n}$. Tiếp tục thay $x = \dfrac{1}{m}$ với $m \in \mathbb{Z}^+$ vào $(*)$ thì được

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}a.$$

Nói tóm lại, ta có $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Cuối cùng, với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tuỳ ý, ta xét hai dãy số hữu tỷ dương $(u_n), (v_n)$ sao cho

$$u_n < x_0 < v_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = x_0$$

thì theo tính tăng ngặt của f, ta có

$$f(u_n) < f(x_0) < f(v_n) \implies au_n < f(x_0) < av_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Từ đây cho $n \to \infty$ thì có ngay $ax_0 \leq f(x_0) \leq ax_0$, thành thử $f(x_0) = ax_0$. Do đó $f(x) = ax, \forall x > 0$. Thử lại, ta thấy các hàm f, g như trên đều thoả mãn đề bài. Vậy nên $f(x) = ax,\ \forall x > 0$ và $g(x) = x^2,\ \forall x > 0$ là các hàm cần tìm, với $a > 0$ bất kỳ. □

Bình luận. Sau khi thu được (34), ta có thể chỉ ra $g(x) = x^2,\ \forall x > 0$ bằng cách khác như sau:
Cách 2: Trong (34) ta cho $n = 2023$ và $x = y^2$ thì có:

$$f\left(2024y^2\right) \geq f\left(y^2\right) + 2023 f\big(g(y)\big),\ \forall y > 0.$$

Áp dụng (ii) cho vế trái của đánh giá trên, ta được:

$$\begin{aligned}&2024 f\big(g(y)\big) \geq f\left(y^2\right) + 2023 f\big(g(y)\big),\ \forall y > 0\\ &\implies f\big(g(y)\big) \geq f\left(y^2\right),\ \forall y > 0.\end{aligned}$$

Mà f là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$ nên ta phải có $g(y) \geq y^2,\ \forall y > 0$. Kết hợp với đánh giá trước đó, ta được $g(y) = y^2,\ \forall y > 0$.

Bạn đọc có thể thử sức với bài toán tương tự sau đây: Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f(x + y^2) = f(g(y)) + \frac{y^2 f(x)^3}{g(yf(x))},\ \forall x, y > 0.$$

Bài toán 13

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn: tồn tại đa thức $P(x)$ khác hằng, có tất cả hệ số đều không âm sao cho

$$f\left(yf(x)^2 + x\right) = x^2 f\big(P(y)\big) + f(x),\ \forall x, y > 0. \tag{35}$$

Lời giải. Giả sử phản chứng rằng $\deg P \geq 2$. Khi đó với mỗi $x > 1$ thì phương trình (ẩn y)

$$yf(x)^2 + x = P(y) \iff P(y) - yf(x)^2 - x = 0$$

luôn có nghiệm $y_x > 0$ theo Định lý giá trị trung gian. Lúc này, trong (35) xét $x > 1$ và cho $y = y_x$ thì được:

$$\begin{aligned}&f\big(P(y_x)\big) = x^2 f\big(P(y_x)\big) + f(x)\\ \implies &\left(1 - x^2\right) f\big(P(y_x)\big) = f(x) > 0,\ \text{vô lý vì } x > 1.\end{aligned}$$

Do đó $\deg P \leq 1$. Mà $P(x)$ khác hằng nên $P(x) = ax + b$, với $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 > 0$.
Trong (35) thay y bởi $\dfrac{y}{f(x)^2}$ thì có:

$$f(x + y) = x^2 f\left(\frac{ay}{f(x)^2} + b\right) + f(x),\ \forall x, y > 0.$$

Từ đây ta có luôn f tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$. Nếu như $b > 0$ thì $f\left(\dfrac{ay}{f(x)^2} + b\right) > f(b)$, dẫn đến là

$$f\left(y + x\right) > x^2 f(b) + f(x),\ \forall x, y > 0.$$

Lấy $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2025$ tùy ý. Khi đó, với mỗi $k \in \overline{0, n-1}$, ta thay x bởi $x + \dfrac{k}{n}$ và $y = \dfrac{1}{n}$ vào đánh giá trên thì được:

$$f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) > \left(x + \frac{k}{n}\right)^2 f(b) + f\left(x + \frac{k}{n}\right) > x^2 f(b) + f\left(x + \frac{k}{n}\right),\ \forall x > 0.$$

Tóm lại, với $x > 0$ bất kỳ ta đều có:

$$f\left(x + \frac{k+1}{n}\right) > f\left(x + \frac{k}{n}\right) + x^2 f(b).$$

Cho k chạy từ 0 đến $n-1$ rồi cộng tất cả các bất đẳng thức lại, ta được:

$$f\left(x + 1\right) > f\left(x\right) + nx^2 f(b).$$

Ở trên ta lấy $n \geq 2025$ bất kỳ, vì vậy:

$$f\left(x + 1\right) > f\left(x\right) + nx^2 f(b),\ \forall n \geq 2025.$$

Đến đây cho $n \to \infty$ ta thu được điều vô lý! Vì vậy $b = 0$, và lúc này (35) trở thành:

$$f\left(x + \frac{y}{a} f(x)^2\right) = f(x) + x^2 f\left(y\right),\ \forall x, y > 0. \tag{36}$$

Đến đây thay y bởi $y + \dfrac{z}{a} f(y)^2$ rồi sử dụng (36) thì được:

$$f\left(x + \frac{y}{a} f(x)^2 + \frac{z}{a^2} f(y)^2 f(x)^2\right) = f(x) + x^2 f\left(y\right) + x^2 y^2 f(z),\ \forall x, y, z > 0.$$

Đến đây hoán đổi vị trí của x và y cho nhau rồi đối chiếu với đẳng thức cũ, thu được:

$$f\left(x + \frac{y}{a} f(x)^2 + \frac{z}{a^2} f(y)^2 f(x)^2\right) - f(x) - x^2 f\left(y\right) = f\left(y + \frac{x}{a} f(y)^2 + \frac{z}{a^2} f(y)^2 f(x)^2\right) - f(y) - y^2 f\left(x\right),$$

với mọi $x, y, z > 0$. Từ đây thay z bởi $\dfrac{a^2 z}{f(x)^2 f(y)^2}$ thì được

$$f\left(z + x + \frac{y}{a} f(x)^2\right) - f(x) - x^2 f\left(y\right) = f\left(z + y + \frac{x}{a} f(y)^2\right) - f(y) - y^2 f\left(x\right),\ \forall x, y, z > 0. \tag{37}$$

Đến đây xét hai trường hợp:

$\boxed{\text{TH1:}}$ $x + \dfrac{y}{a} f(x)^2 = y + \dfrac{x}{a} f(y)^2,\ \forall x, y > 0$. Khi đó từ (37) ta suy ra:

$$f(x) + x^2 f\left(y\right) = f(y) + y^2 f\left(x\right),\ \forall x, y > 0.$$

Đến đây cho $y = 1$ thì được $f(1) = x^2 f(1),\ \forall x > 0$, vô lý!

$\boxed{\text{TH2:}}$ Tồn tại $x_0, y_0 > 0$ sao cho $x_0 + \dfrac{y_0}{a} f(x_0)^2 \neq y_0 + \dfrac{x_0}{a} f(y_0)^2$. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$A = x_0 + \frac{y_0}{a} f(x_0)^2 - y_0 - \frac{x_0}{a} f(y_0)^2 > 0.$$

Thay $x = x_0$ và $y = y_0$ vào (37) và đặt $B = f(x_0) + x_0^2 f(y_0) - f(y_0) - y_0^2 f(x_0)$ thì được:

$$f\left(z + x_0 + \frac{y_0}{a} f(x_0)^2\right) = f\left(z + y_0 + \frac{x_0}{a} f(y_0)^2\right) + B,\ \forall z > 0.$$

Đến đây thay x bởi $x - C$, trong đó $C = y_0 + \frac{x_0}{a} f(y_0)^2$ thì được:

$$f(z + A) = f(z) + B,\ \forall z > C.$$

Ta cũng dễ dàng quy nạp được rằng:

$$f(z + nA) = f(z) + nB,\ \forall z > C,\ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{38}$$

Lúc này, trong (36) ta thay y bởi $y + A$ thì được:

$$f\left(x + \frac{y}{a} f(x)^2 + \frac{A}{a} f(x)^2\right) = f(x) + x^2 f(y) + Bx^2,\ \forall x > 0,\ y > C.$$

Đối chiếu với (36) ta được:

$$f\left(x + \frac{y}{a} f(x)^2 + \frac{A}{a} f(x)^2\right) = f\left(x + \frac{y}{a} f(x)^2\right) + Bx^2,\ \forall x > 0,\ y > C.$$

Đến đây thay y bởi $\dfrac{a(y-x)}{f(x)^2}$ thì có

$$f\left(y + \frac{A}{a} f(x)^2\right) = f(y) + Bx^2,\ \forall x > 0,\ y > \frac{Cf(x)^2}{a} + x.$$

Lấy $x > 0$ và $y > C$ tùy ý, ta hoàn toàn chọn được $n \in \mathbb{Z}^+$ (đủ lớn) sao cho

$$y + nA > \frac{Cf(x)^2}{a} + x.$$

Vì thế, theo đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} & f\left(y + nA + \frac{A}{a} f(x)^2\right) = f(y + nA) + Bx^2 \\ \overset{(38)}{\Longrightarrow}\ & f\left(y + \frac{A}{a} f(x)^2\right) = f(y) + Bx^2. \end{aligned}$$

Nói tóm lại, ta thu được:

$$f\left(y + \frac{A}{a} f(x)^2\right) = f(y) + Bx^2,\ \forall x > 0,\ y > C. \tag{39}$$

Áp dụng Bổ đề $\mathbb{R}^+$, ta suy ra: Tồn tại hằng số $k > 0$ để mà

$$\frac{A}{a} f(x)^2 = kBx^2,\ \forall x > 0 \Longrightarrow f(x) = rx,\ \forall x > 0 \quad \left(\text{với } r = \sqrt{\frac{kBa}{A}}\right).$$

Thay vào (36) ta thu được $a = r^2$. Vậy tất cả cặp hàm số (f, P) cần tìm là $f(x) = rx,\ \forall x > 0$, $P(x) = r^2 x,\ \forall x > 0$, với r là hằng số dương bất kỳ. □

Bình luận. Sau khi thu được (39), ta có thể hoàn tất lời giải bài toán một cách "nhẹ nhàng" hơn như sau: Trong (39) thay x bởi $x + A$ và sử dụng (38) thì được:

$$\begin{aligned} f\left(y + \frac{A}{a}f(x)^2 + \frac{2AB}{a}f(x) + \frac{AB^2}{a}\right) &= \left[f(y) + Bx^2\right] + 2BAx + BA^2 \\ &\overset{(39)}{=} \left(y + \frac{A}{a}f(x)^2\right) + 2BAx + BA^2, \end{aligned}$$

với mọi $x, y > C$. Thực hiện tương tự như bước chỉ ra (39), ta thu được:

$$f\left(y + \frac{2AB}{a}f(x) + \frac{AB^2}{a}\right) = f(y) + 2BAx + BA^2,\ \forall x, y > C. \tag{40}$$

$$f\left(2C + \frac{2AB}{a}f(x) + \frac{AB^2}{a}\right) - f(2C) = 2BAx + BA^2,\ \forall x > C. \tag{41}$$

Thay ngược trở lại vào (40), ta được:

$$f\left(y + \frac{2AB}{a}f(x) + \frac{AB^2}{a}\right) = f(y) - f(2C) + f\left(2C + \frac{2AB}{a}f(x) + \frac{AB^2}{a}\right),\ \forall x, y > C.$$

Chú ý là từ (41) ta thấy $(M, +\infty) \subset f(\mathbb{R}^+)$ với $M = f(2C) + 2ABC + BA^2$ nên đẳng thức trên có thể viết lại thành:

$$f(y + z) = f(y) - f(2C) + f(2C + z),\ \forall y > C, z > D.$$

Đến đây thay y bởi $y + 2C$ và đặt $g(x) = f(x + 2C) - f(2C)$, $\forall x > 0$ thì đẳng thức trên trở thành:

$$g(y) + g(z) = g(y + z),\ \forall y, z > D.$$

Cuối cùng là một số bài toán sử dụng phép thế triệt tiêu để bạn đọc tự rèn luyện thêm.

§2 Bài tập tự luyện

Bài 1. (APMO 2023) Cho trước số thực $c > 0$. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\big((c+1)x + f(y)\big) = 2cx + f(x + 2y),\ \forall x, y > 0.$$

Bài 2. (VMO 2022) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y),\ \forall x, y \in (0, +\infty).$$

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\big(x + 2f(y)\big) = f(x + y) + 2y + 2f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Bài 4. (Kazakhstan MO 2020) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x)f(y) = f\left(\frac{xy}{xf(x) + y}\right),\ \forall x, y > 0.$$

Bài 5. (Balkan Shortlist 2024) Với $c > 0$, chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(y^2 f(x) + y + c) = xf(x + y^2),\ \forall x, y > 0.$$

Bài 6. (Duyên hải Bắc Bộ 2025 – khối 11) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$xf\big(x + f(y)\big) = f\big(f(xy) + 1\big),\ \forall x, y > 0.$$

Bài 7. (Thái Lan TST 2014) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\big(1 + xf(y)\big) = yf(x + y),\ \forall x, y > 0.$$

Bài 8.

(a) **(Balkan MO Shortlist 2017)** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + y) = f(x) + 3x + yf(y),\ \forall x, y > 0.$$

(b) **(Phát triển từ ý (a))** Tìm tất cả $m \in \mathbb{R}$ sao cho tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x + 2025f(y)) = xf(x) + f(y) + mx,\ \forall x, y > 0.$$

Bài 9. (Kazakhstan MO 2024) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\left(x + \frac{f(xy)}{x}\right) = f(xy)f\left(y + \frac{1}{y}\right),\ \forall x, y > 0.$$

Bài 10. (Brazil MO 2019) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f\big(xy + f(x)\big) = f\big(f(x)f(y)\big) + x,\ \forall x, y > 0.$$

Tài liệu

[1] Lê Phúc Lữ, "Sử dụng yếu tố $\mathbb{Z}^+$ trong việc giải phương trình hàm trên $\mathbb{R}^+$" trong *Kỷ yếu hội thảo Các chuyên đề chuyên sâu Toán THPT 2023*. Vĩnh Long, 2023.

[2] Trần Nhật Quang, "Tìm tòi nhiều lời giải cho một bài toán phương trình hàm" trong *Tạp chí Pi, số tháng 3–2024*. Hội Toán học Việt Nam, 2024.

[3] Group Facebook: *Hướng tới Olympic Toán Việt Nam*.

[4] Diễn đàn: *Art of Problem Solving* (AOPS).