

SKILL VECTOR VẬN TỐC

Bài toán gốc: Cho điểm A bất kì biết tọa độ. Sau thời gian t điểm A di chuyển theo vectơ định hướng \vec{u} với tốc độ v tới điểm A' . Xác định tọa độ của điểm A'



Bước 1: Ta chuẩn hóa vectơ \vec{u} thành vectơ $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ có độ dài bằng 1 và bảo toàn chiều (hướng).

Khi đó vectơ vận tốc xác định hướng và độ lớn di chuyển của A là: $\vec{v} = v \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Bước 2: Ta có: $\overrightarrow{AA'} = t \cdot \vec{v}$, từ đây ta rút được công thức tìm tọa độ A' theo thời gian t như sau:

$$A' = A + t \cdot \vec{v} \quad (*)$$

Công thức mở rộng

Nếu điểm A di chuyển với vectơ vận tốc \vec{a} và chịu ảnh hưởng của vectơ vận tốc \vec{b}
Thì điểm A sẽ chuyển động với vectơ vận tốc mới là $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Câu 1: Cho điểm $A(1,2,3)$ di chuyển theo hướng vectơ $\vec{u} = (2; -1; 2)$ với vận tốc là $6(km/h)$.

Xác định tọa độ điểm A' sau t giờ.

Câu 2: Một máy bay xuất phát từ $A(1,2,3)$ di chuyển theo hướng vectơ $\vec{a} = (2; -1; 2)$ với vận tốc là $150(km/h)$. Xác định tọa độ điểm A' sau 10 giờ biết gió thổi theo hướng vectơ $\vec{b} = (3; 4; 0)$ với vận tốc $100(km/h)$.

Câu 3: Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, đơn vị đo lấy theo kilômét, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0;35;10)$, bay theo hướng vectơ $\vec{v}_1 = (3; 4; 0)$ với tốc độ không đổi $900(km/h)$ và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31;10;11)$, bay theo hướng $\vec{v}_2 = (5; 12; 0)$ với tốc độ không đổi $910(km/h)$. Biết rằng khoảng cách an toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng 9,3 km). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Đặt $A'(3a; 4a + 35; 10)$ là điểm di chuyển của máy bay thứ nhất

Gọi t (giờ) là thời điểm mà hai máy bay bay sau t giờ vi phạm khoảng cách an toàn

Ta có khoảng cách so với điểm ban đầu là $A'A = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 900t \Leftrightarrow a = 180t$

HẸN NHAU Ở CÔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

$$\Rightarrow A'(540t; 35 + 720t; 10)$$

Trong tự ta đặt điểm $B'(5b + 31; 12b + 10; 11)$ là điểm di chuyển của máy bay thứ hai

$$\text{Khi đó } \sqrt{(5b)^2 + (12b)^2} = 910t \Rightarrow b = 70t$$

$$\text{suy ra } B(31 + 350t; 10 + 840t; 11)$$

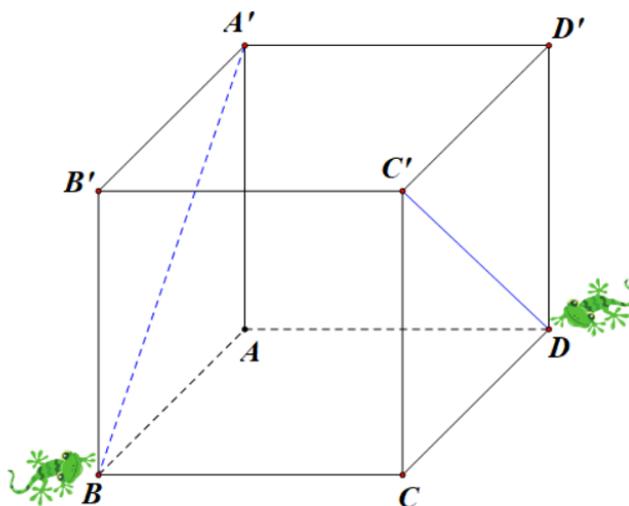
Vì khoảng cách tối thiểu để hai máy bay an toàn là 9,3 nên

$$A'B' \leq 9,3 \Leftrightarrow (31 - 190t) + (-25 + 120t) + (1)^2 \leq 9,3^2$$

$$\Leftrightarrow 0,11 \leq t \leq 0,21 \text{ (phút)}$$

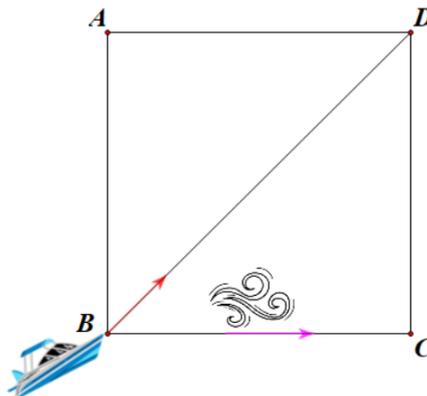
Vậy sau ít nhất 8,42 giây thì vi phạm khoảng cách an toàn

Câu 4: Trong một căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3$; $AD = 6$; $AA' = 4$. Anh Shiper đang nằm trên võng thì quan sát thấy 2 con thạch sùng tại 2 góc nhà B và D . Con thạch sùng tại B bò dọc theo đường chéo BA' với vận tốc $2(m/s)$, còn con tại D bò dọc theo đường chéo DC' với vận tốc $3(m/s)$.



Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa 2 con thạch sùng là bao nhiêu mét.

Câu 5: Trên một cái ao hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 30m$; $AD = 40m$. Anh Shiper Toán thí nghiệm 1 mô hình cano siêu tốc xuất phát tại điểm B chạy theo hướng vectơ \overrightarrow{BD} với vận tốc $150m/phút$. Tuy nhiên cùng lúc đó gió thổi mạnh với vận tốc $80m/phút$ theo hướng vectơ \overrightarrow{BC} .

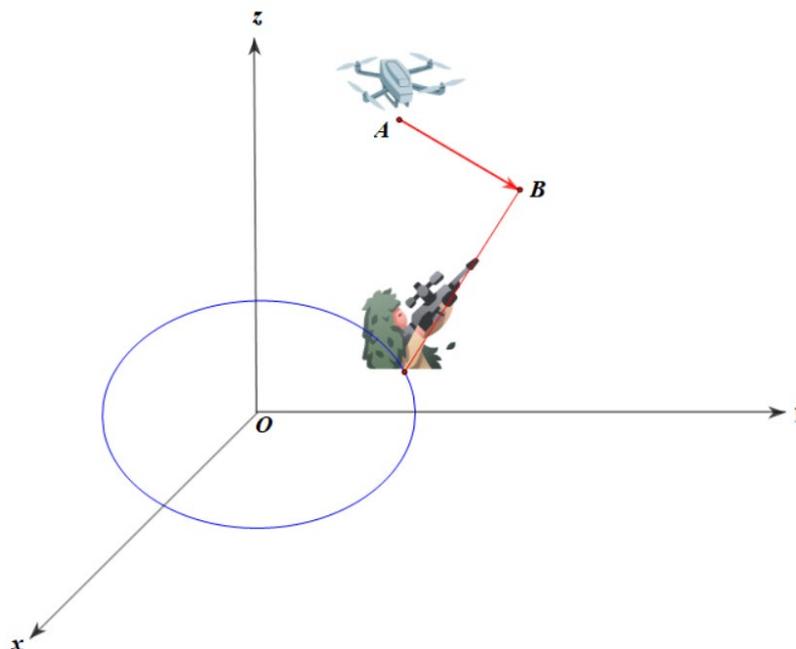


Hỏi sau bao nhiêu phút thì cano chạm vào bờ bên kia.

Câu 6: Trong một game mô phỏng bắn súng. Mục tiêu xuất phát từ vị trí $A(-5; 4; 3)$ bay theo hướng vector $\vec{a} = (1; 2; 2)$ với vận tốc $6(m/s)$, sau $3(s)$ thì dừng tại vị trí điểm B . Cùng lúc đó Anh

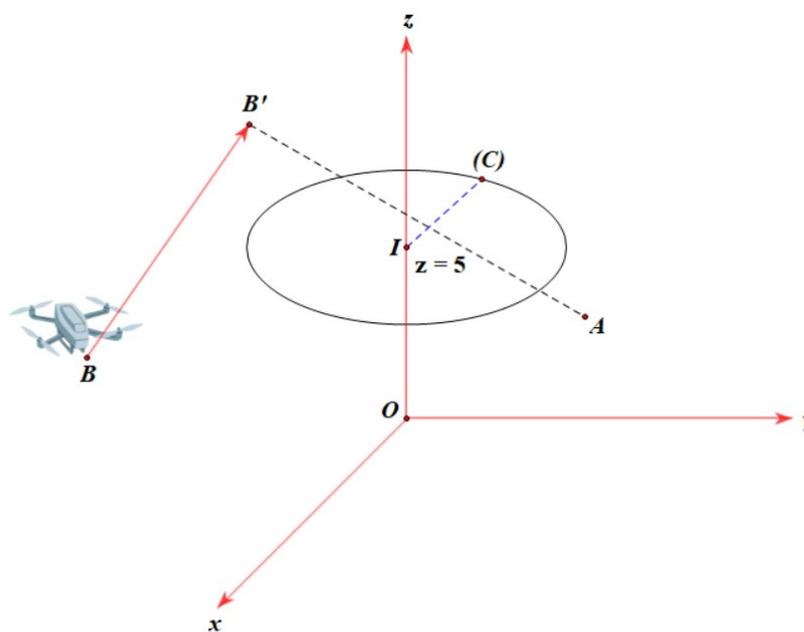
HẸN NHAU Ở CỐNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

Shiper Toán di chuyển trên mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy) quanh đường tròn tâm O bán kính $2m$. Hỏi khoảng cách ngắn nhất để ngắm bắn mục tiêu tại B là bao nhiêu mét (Biết đơn vị trên mỗi trục là mét và kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục)?



Câu 7: Trong không gian $(Oxyz)$, một miếng bìa hình tròn (C) chặn không cho ánh sáng đi qua có phương trình: $\begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$. Biết rằng có một mục tiêu đặt tại vị trí $A(1, 2, 3)$, cùng lúc đó Anh

Shiper Toán điều khiển một chiếc Drone quan sát mục tiêu xuất phát từ vị trí $B(1; -3; 5)$ và bay theo vector vận tốc $\vec{v} = (-1; 3; 5)$. Hỏi sau ít nhất bao lâu từ vị trí B thì Drone không nhìn thấy được mục tiêu tại A (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục)?



HẸN NHAU Ở CỐNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, một Cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp cùng với chiều vectơ $\vec{u} = (0; -2; 6)$ với tốc độ $4(m/s)$ (đơn vị mỗi trục tọa độ là mét).



Giả sử sau $5s$ kể từ lúc xuất phát, Cabin đến điểm A' . Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$. Tính $a + 3b - c$

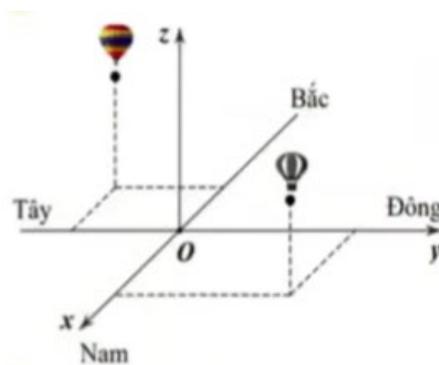
Lời giải

- Chuẩn hóa: $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(0; \frac{-1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \rightarrow \vec{v} = v \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = 4 \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(0; \frac{-4}{\sqrt{10}}; \frac{12}{\sqrt{10}}\right)$

- Ta có: $A' = A + \vec{v} \cdot t \xrightarrow{t=5(s)} A'(-2; 1 - 2\sqrt{10}; 5 + 6\sqrt{10})$

- Vậy $a + 3b - c = -2 + 3 - 6\sqrt{10} + 5 + 6\sqrt{10} = 6$

Câu 9: Trong không gian, xem mặt đất là phẳng, gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong đó mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là km). Người ta quán sát thấy có hai chiếc khinh khí cầu đang bay trên bầu trời. Tại thời điểm bắt đầu quan sát, chiếc thứ nhất đang ở vị trí điểm $A(2;1;5)$ và bay thẳng về phía Bắc với tốc độ không đổi là $60(km/h)$, còn chiếc thứ hai đang ở vị trí điểm $B(-1;-1;0,8)$ và bay thẳng về phía Đông với tốc độ không đổi là $40(km/h)$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng trong suốt quá trình bay thì hai chiếc khinh khí cầu luôn giữ nguyên độ cao so với mặt đất. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai chiếc khinh khí cầu bằng bao nhiêu km ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mỗi đơn vị trên trục ứng với $10(km)$, trạm kiểm soát không lưu đang chạy theo dõi hai máy bay. Máy bay thứ nhất ban đầu ở tọa độ $A(25;-10;1)$ và

HẸN NHAU Ở CỐNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

bay theo hướng vectơ $\vec{v}_1 = (-3; -4; 0)$ với tốc độ không đổi là $750(km/h)$. Máy bay thứ hai ban đầu ở tọa độ $B(30; -25; 1,1)$ và bay theo hướng vectơ $\vec{v}_2 = (-4; 3; 0)$ với tốc độ không đổi là $900(km/h)$. Trên máy bay thứ nhất có gắn Radar tránh va chạm với bán kính hoạt động là $50(km)$. Hỏi thời gian máy bay thứ hai xuất hiện trên màn hình của Radar máy bay thứ nhất là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 11: Trong không gian xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục lấy theo mét. **Anh Shiper Toán** điều khiển một chiếc máy bay xuất phát từ điểm O và bay với tốc độ không đổi, vectơ thể hiện độ dịch chuyển của máy bay sau mỗi giây là $\vec{u} = (4; -1; 3)$. Cùng thời điểm, chiếc máy bay không người lái xuất phát từ điểm $A(24; 12; 18)$ và bay với tốc độ không đổi là $2\sqrt{38}(m/s)$ theo hướng vectơ $\vec{v} = (-2; 5; -3)$.



Trong 10 giây đầu tiên sau khi xuất phát, khoảng cách nhỏ nhất giữa hai chiếc máy bay được làm tròn đến hàng đơn vị là bao nhiêu mét.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ với mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy , đơn vị trên mỗi trục bằng $1km$. **Anh Shiper Toán** điều khiển 2 drone quan sát khu vườn của nhà mình.



Chiếc thứ nhất xuất phát từ điểm $A(1; -2; 3)$ bay theo hướng vectơ $\vec{a} = (3; 4; 0)$ với vận tốc $10km/h$. Chiếc thứ 2 xuất phát từ điểm $B(-1; 4; 2)$ có vectơ vận tốc $(4; -5; 2)$. Cùng lúc đó anh đo được vận tốc của gió là $5km/h$ theo hướng vectơ $\vec{b} = (1; 0; 0)$. Tìm vị trí đứng của anh **Shiper**, để sau 2 giờ, tổng khoảng cách đến 2 drone là nhỏ nhất.

Câu 13: Trạm kiểm soát không quân đang theo dõi hai máy bay chiến đấu $Su-30$ và $MiG-31$. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là $1(km)$ và xem mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay chiến đấu $Su-30$ ở tọa độ $A(0; 35; 10)$ bay theo hướng vectơ $\vec{v}_1 = (3; 4; 0)$ với tốc độ không đổi là $900(km/h)$ và máy bay chiến đấu $MiG-31$ ở tọa độ $B(31; 10; 11)$, bay theo hướng của vectơ $\vec{v}_2 = (5; 12; 0)$ với tốc độ

HẸN NHAU Ở CỔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

không đổi $910(km/h)$. Khu vực này có gió mạnh thổi với vận tốc bằng $80(km/h)$ theo hướng vectơ $\vec{u} = (-3; 0; 4)$, gió ảnh hưởng đến hai máy bay trong quá trình bay. Một khu vực không phận bị hạn chế bay đã được một quốc gia khác thiết lập, có dạng hình trụ với tâm đáy tại $C(178; 430; 0)$, bán kính đáy $7(km)$, trục vuông góc với mặt đất chiều và chiều cao $43(km)$, máy bay $MiG-31$ có nhiệm vụ bay vào khu vực không phận bị hạn chế để thăm dò.



Tại thời điểm máy bay chiến đấu $MiG-31$ bay ra khỏi khu vực không phận bị hạn chế thì khoảng cách giữa 2 máy bay chiến đấu là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

SKILL VECTOR VẬN TỐC

Bài toán gốc: Cho điểm A bất kì biết tọa độ. Sau thời gian t điểm A di chuyển theo vectơ định hướng \vec{u} với tốc độ v tới điểm A' . Xác định tọa độ của điểm A'



Bước 1: Ta chuẩn hóa vectơ \vec{u} thành vectơ $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ có độ dài bằng 1 và bảo toàn chiều (hướng).

Khi đó vectơ vận tốc xác định hướng và độ lớn di chuyển của A là: $\vec{v} = v \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Bước 2: Ta có: $\overrightarrow{AA'} = t \cdot \vec{v}$, từ đây ta rút được công thức tìm tọa độ A' theo thời gian t như sau:

$$A' = A + t \cdot \vec{v} \quad (*)$$

Công thức mở rộng

Nếu điểm A di chuyển với vectơ vận tốc \vec{a} và chịu ảnh hưởng của vectơ vận tốc \vec{b}
Thì điểm A sẽ chuyển động với vectơ vận tốc mới là $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Câu 14: Cho điểm $A(1, 2, 3)$ di chuyển theo hướng vectơ $\vec{u} = (2; -1; 2)$ với vận tốc là $6(km/h)$.

Xác định tọa độ điểm A' sau t giờ.

Lời giải



- **Bước 1:** Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3$, Chuẩn hóa $\vec{u} \rightarrow \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(2; -1; 2)}{3} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Khi đó $\vec{v} = v \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{2}{3}\right) = (4; -2; 4)$

- **Bước 2:** Vậy tọa độ điểm A' theo thời gian t là: $A'(1+4t; 2-2t; 3+4t), (a, b, c \in \mathbb{R})$

Câu 15: Một máy bay xuất phát từ $A(1, 2, 3)$ di chuyển theo hướng vectơ $\vec{a} = (2; -1; 2)$ với vận tốc là $150(km/h)$. Xác định tọa độ điểm A' sau 10 giờ biết gió thổi theo hướng vectơ $\vec{b} = (3; 4; 0)$ với vận tốc $100(km/h)$.

Lời giải

Vecto vận tốc của máy bay là $(100; -50; 100)$

HẸN NHAU Ở CÔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

Vecto vận tốc của gió là $(60; 80; 0)$

Vậy vecto vận tốc của chuyển động là $(100; -50; 100) + (60; 80; 0) = (160; 30; 100)$

Vậy tọa độ máy bay sau 10 giờ là $(1; 2; 3) + 10 \cdot (160; 30; 100) = (1601; 302; 1003)$

Câu 16: Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, đơn vị đo lấy theo kilômét, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0; 35; 10)$, bay theo hướng vectơ $\vec{v}_1 = (3; 4; 0)$ với tốc độ không đổi $900(\text{km/h})$ và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31; 10; 11)$, bay theo hướng $\vec{v}_2 = (5; 12; 0)$ với tốc độ không đổi $910(\text{km/h})$. Biết rằng khoảng cách an toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng $9,3 \text{ km}$). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Đặt $A'(3a; 4a + 35; 10)$ là điểm di chuyển của máy bay thứ nhất

Gọi t (giờ) là thời điểm mà hai máy bay bay sau t giờ vi phạm khoảng cách an toàn

Ta có khoảng cách so với điểm ban đầu là $A'A = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 900t \Leftrightarrow a = 180t$

$\Rightarrow A'(540t; 35 + 720t; 10)$

Tương tự ta đặt điểm $B'(5b + 31; 12b + 10; 11)$ là điểm di chuyển của máy bay thứ hai

Khi đó $\sqrt{(5b)^2 + (12b)^2} = 910t \Rightarrow b = 70t$

suy ra $B(31 + 350t; 10 + 840t; 11)$

Vì khoảng cách tối thiểu để hai máy bay an toàn là $9,3$ nên

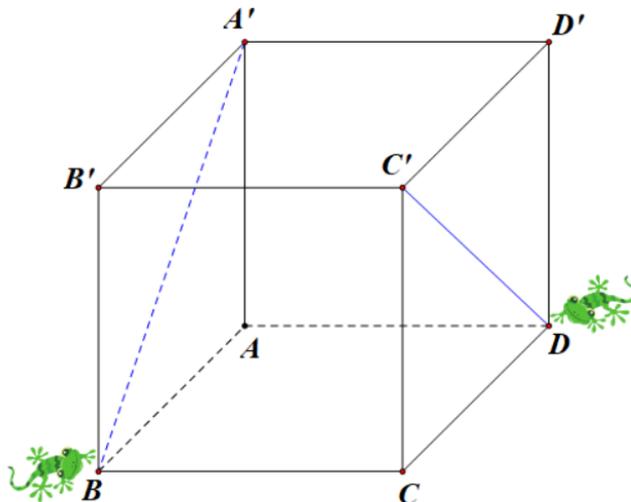
$$A'B' \leq 9,3 \Leftrightarrow (31 - 190t)^2 + (-25 + 120t)^2 + (1)^2 \leq 9,3^2$$

$$\Leftrightarrow 0,11 \leq t \leq 0,21 \text{ (phút)}$$

Vậy sau ít nhất $8,42$ giây thì vi phạm khoảng cách an toàn

Câu 17: Trong một căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3; AD = 6; AA' = 4$. Anh Shiper đang nằm trên võng thì quan sát thấy 2 con thạch sùng tại 2 góc nhà B và D . Con thạch sùng tại B bò dọc theo đường chéo BA' với vận tốc $2(m/s)$, còn con tại D bò dọc theo đường chéo DC' với vận tốc $3(m/s)$.

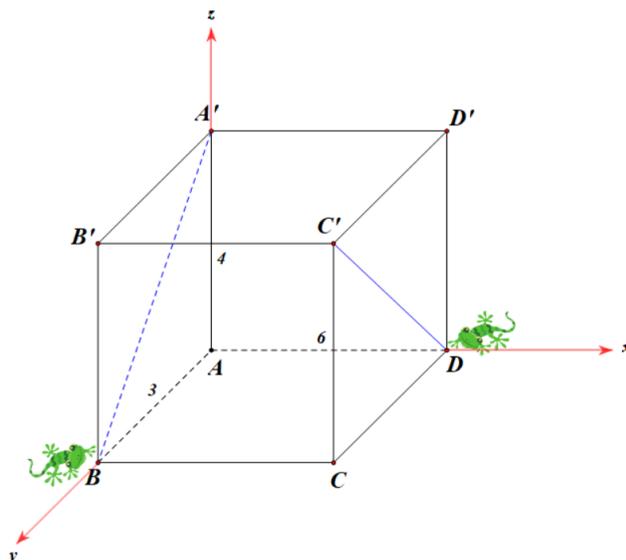
HẸN NHAU Ở CÔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC



Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa 2 con thạch sùng là bao nhiêu mét.

Lời Giải:

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Khi đó ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;3;0)$, $A'(0;0;4)$, $D(6;0;0)$, $C'(6;3;4)$.

Có: $\overrightarrow{BA'} = (0; -3; 4) \rightarrow |\overrightarrow{BA'}| = 5$, $\overrightarrow{DC'} = (0; 3; 4) \rightarrow |\overrightarrow{DC'}| = 5$.

Gọi \vec{v}_1 và \vec{v}_2 lần lượt là vector vận tốc của con thạch sùng di chuyển theo hướng BA' và DC' .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{\overrightarrow{BA'}}{|\overrightarrow{BA'}|} \cdot v_1 = \frac{(0; -3; 4)}{5} \cdot 2 = \left(0; -\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right) \\ \vec{v}_2 = \frac{\overrightarrow{DC'}}{|\overrightarrow{DC'}|} \cdot v_2 = \frac{(0; 3; 4)}{5} \cdot 3 = \left(0; \frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right) \end{cases}$$

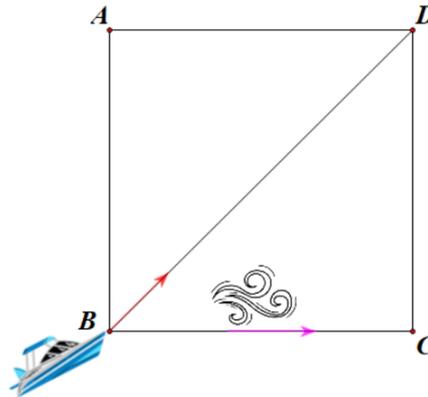
$$\text{Tọa độ của hai con thạch sùng sau thời gian } t \text{ giây là: } \begin{cases} B' = B + \vec{v}_1 \cdot t = \left(0; 3 - \frac{6}{5}t; \frac{8}{5}t\right) \\ D' = D + \vec{v}_2 \cdot t = \left(6; \frac{9}{5}t; \frac{12}{5}t\right) \end{cases}$$

$$\text{Khoảng cách giữa hai con thạch sùng là: } B'D' = \sqrt{6^2 + (3t - 3)^2 + \left(\frac{4}{5}t\right)^2}$$

HẸN NHAU Ở CỔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

$$\text{Casio} \left(\frac{d}{dx} \right) \rightarrow B'D'_{\text{Min}} \leftrightarrow t = \frac{225}{241} (s) \rightarrow B'D'_{\text{Min}} \approx 6,05 (m).$$

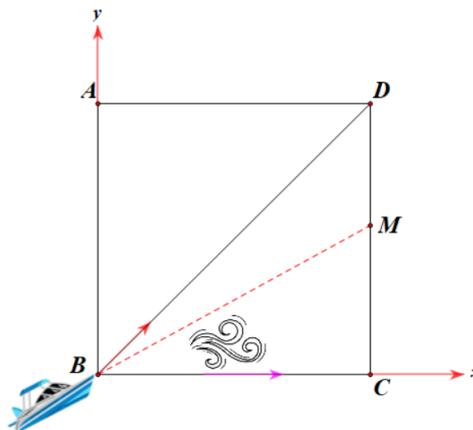
Câu 18: Trên một cái ao hình chữ nhật ABCD có $AB = 30m$; $AD = 40m$. Anh Shiper Toán thí nghiệm 1 mô hình cano siêu tốc xuất phát tại điểm B chạy theo hướng vectơ \overline{BD} với vận tốc 150m/phút. Tuy nhiên cùng lúc đó gió thổi mạnh với vận tốc 80m/phút theo hướng vectơ \overline{BC} .



Hỏi sau bao nhiêu phút thì cano chạm vào bờ bên kia.

Lời Giải:

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Khi đó ta có: $B(0;0)$, $C(40;0)$, $D(40;30)$.

Có: $\overline{BD} = (40;30) \rightarrow |\overline{BD}| = 50$, $\overline{BC} = (40;0) \rightarrow |\overline{BC}| = 40$.

Gọi \vec{v}_1 và \vec{v}_2 lần lượt là vector vận tốc của canô và gió di chuyển theo hướng BD và BC .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{\overline{BD}}{|\overline{BD}|} \cdot v_1 = \frac{(40;30)}{50} \cdot 150 = (120;90) \\ \vec{v}_2 = \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} \cdot v_2 = \frac{(40;0)}{40} \cdot 80 = (80;0) \end{cases}$$

Mà canô lại chịu tác động của gió nên vector vận tốc của canô là: $\vec{v}' = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (200;90)$.

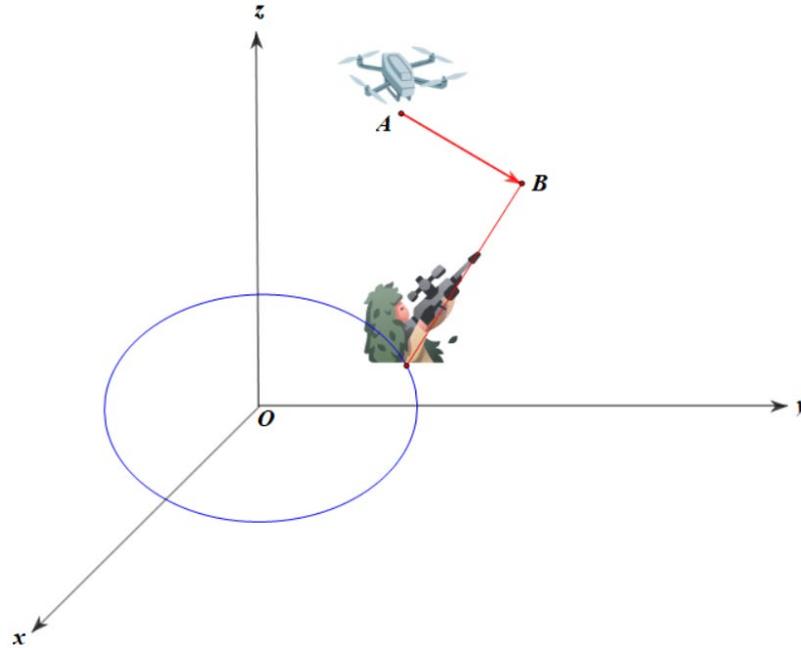
Vì chịu tác động của gió nên hướng đi của canô từ BD thành BM .

Khi đó tọa độ canô sau thời gian t phút là: $B' = B + \vec{v}' \cdot t = (200t;90t)$.

Để canô đến bờ bên kia thì $BB' = BM \leftrightarrow 200t = 40 \rightarrow t = \frac{1}{5} (p)$.

HẸN NHAU Ở CỒNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

Câu 19: Trong một game mô phỏng bắn súng. Mục tiêu xuất phát từ vị trí $A(-5;4;3)$ bay theo hướng vector $\vec{a} = (1;2;2)$ với vận tốc $6(m/s)$, sau $3(s)$ thì dừng tại vị trí điểm B . Cùng lúc đó Anh Shiper Toán di chuyển trên mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy) quanh đường tròn tâm O bán kính $2m$. Hỏi khoảng cách ngắn nhất để ngắm bắn mục tiêu tại B là bao nhiêu mét (Biết đơn vị trên mỗi trục là mét và kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục)?



Đáp án:

--	--	--	--

Lời Giải:

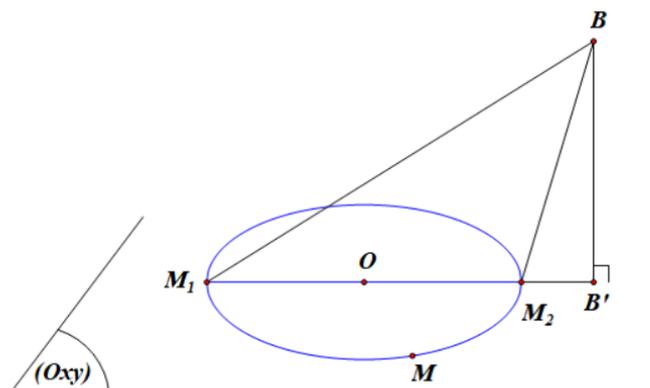
Đáp án: 20,5

- Vector vận tốc: $\vec{v} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot v = \frac{(1;2;2)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \cdot 6 = \frac{(1;2;2)}{3} \cdot 6 = (2;2;4)$.

- Khi đó tọa độ vị trí điểm B sau $t(s)$ là: $B = A + \vec{v} \cdot t = (-5 + 2t; 4 + 2t; 3 + 4t)$.

- Do đó sau $3(s) \Rightarrow B(1;16;15)$.

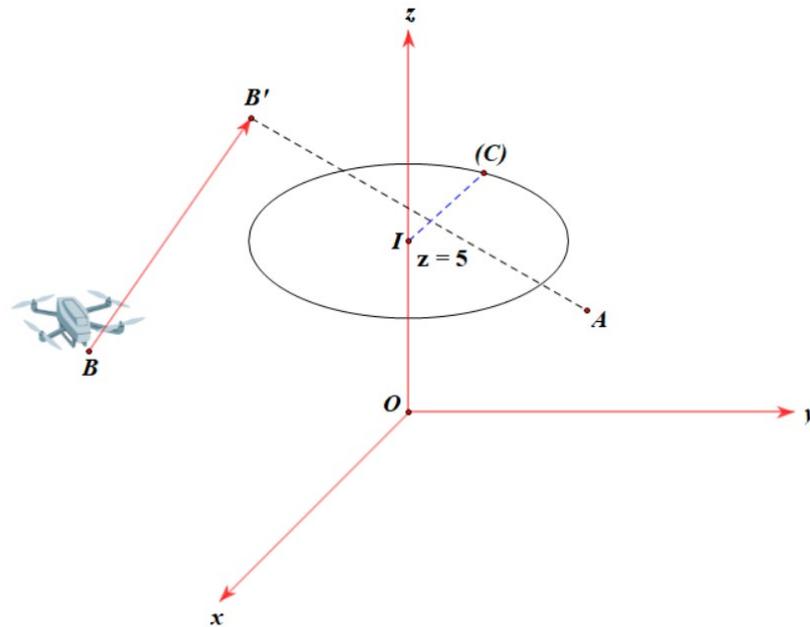
- Gọi B' là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow B'(1;16;0)$.



HẸN NHAU Ở CÔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

- Vậy $BM_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1 \Rightarrow BM_1 = \sqrt{BB'^2 + B'M_1^2} = \sqrt{15^2 + (\sqrt{257} - 2)^2} \approx 20,5(m)$.

Câu 20: Trong không gian $(Oxyz)$, một miếng bìa hình tròn (C) chặn không cho ánh sáng đi qua có phương trình: $\begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$. Biết rằng có một mục tiêu đặt tại vị trí $A(1, 2, 3)$, cùng lúc đó Anh Shiper Toán điều khiển một chiếc Drone quan sát mục tiêu xuất phát từ vị trí $B(1; -3; 5)$ và bay theo vector vận tốc $\vec{v} = (-1; 3; 5)$. Hỏi sau ít nhất bao lâu từ vị trí B thì Drone không nhìn thấy được mục tiêu tại A (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục)?



Đáp án:

--	--	--	--

Lời Giải:

Đáp án: 0,1

- Tọa độ của vị trí B sau thời gian $t(s)$ là: $B' = B + \vec{v}.t = (1-t; -3+3t; 5+5t)$.

- Ta có: $\overline{AB'} = (-t; -5+3t; 2+5t)$.

- Phương trình đường thẳng AB' : $\begin{cases} \overline{u_{AB'}} = \overline{AB'} = (-t; -5+3t; 2+5t) \\ \text{Qua } A(1; 2; 3) \end{cases}$.

- Do đó AB' : $\begin{cases} x = 1-t.k \\ y = 2 + (-5+3t).k, k \in \mathbb{R} \\ z = 3 + (2+5t).k \end{cases}$

- Gọi $M = AB' \cap (C)$: $\begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$.

- Vì $M \in AB' \Rightarrow M(1-t.k; 2 + (-5+3t).k; 3 + (2+5t).k)$ và $M \in (C): z = 5$.

- Điều kiện để M phải nằm trên đoạn thẳng $AB' \Leftrightarrow z_{B'} \geq z_M \geq z_A \Leftrightarrow 5+5t \geq 5 \geq 3 \Leftrightarrow t \geq 0$.

HẸN NHAU Ở CÔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

$$\text{- Do đó: } \begin{cases} z_M = 5 \\ x_M^2 + y_M^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + (2 + 5t) \cdot k = 5 \\ (1 - t \cdot k)^2 + [2 + (-5 + 3t) \cdot k]^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{5t+2} \\ \left(1 - t \cdot \frac{2}{5t+2}\right)^2 + \left[2 + (-5 + 3t) \cdot \frac{2}{5t+2}\right]^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3t+2}{5t+2}\right)^2 + \left(\frac{16t-6}{5t+2}\right)^2 \leq 4.$$

$$\Leftrightarrow (3t+2)^2 + (16t-6)^2 \leq 4 \cdot (5t+2)^2 \Leftrightarrow 165t^2 - 260t + 24 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{130 - \sqrt{12940}}{165} \leq t \leq \frac{130 + \sqrt{12940}}{165}$$

- Vậy thời gian ngắn nhất từ vị trí B thì Drone không thấy mục tiêu A là: $t \approx 0,1(s)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, một Cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp cùng với chiều vectơ $\vec{u} = (0; -2; 6)$ với tốc độ $4(m/s)$ (đơn vị mỗi trục tọa độ là mét).



Giả sử sau $5s$ kể từ lúc xuất phát, Cabin đến điểm A' . Gọi tọa độ $A'(a;b;c)$. Tính $a+3b-c$

Lời giải

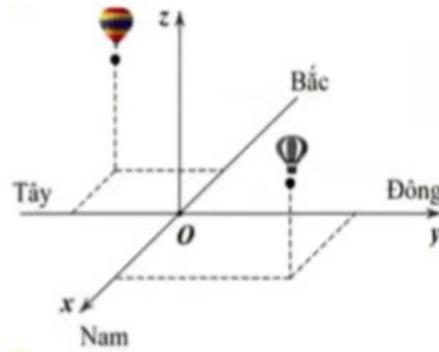
$$\text{- Chuẩn hóa: } \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(0; \frac{-1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \rightarrow \vec{v} = v \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = 4 \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(0; \frac{-4}{\sqrt{10}}; \frac{12}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\text{- Ta có: } A' = A + \vec{v} \cdot t \xrightarrow{t=5(s)} A'(-2; 1 - 2\sqrt{10}; 5 + 6\sqrt{10})$$

$$\text{- Vậy } a + 3b - c = -2 + 3 - 6\sqrt{10} + 5 + 6\sqrt{10} = 6$$

Câu 22: Trong không gian, xem mặt đất là phẳng, gán hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong đó mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là km). Người ta quán sát thấy có hai chiếc khinh khí cầu đang bay trên bầu trời. Tại thời điểm bắt đầu quan sát, chiếc thứ nhất đang ở vị trí điểm $A(2;1,5;0,5)$ và bay thẳng về phía Bắc với tốc độ không đổi là $60(km/h)$, còn chiếc thứ hai đang ở vị trí điểm $B(-1;-1;0,8)$ và bay thẳng về phía Đông với tốc độ không đổi là $40(km/h)$ (tham khảo hình vẽ).

HẸN NHAU Ở CÔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC



Biết rằng trong suốt quá trình bay thì hai chiếc khinh khí cầu luôn giữ nguyên độ cao so với mặt đất. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai chiếc khinh khí cầu bằng bao nhiêu km ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 0,51

$$- \text{Ta có: } A(2; 1; 5; 0, 5) \xrightarrow{\vec{v}_1 = (-60; 0; 0)} A'(2 - 60t; 1; 5; 0, 5)$$

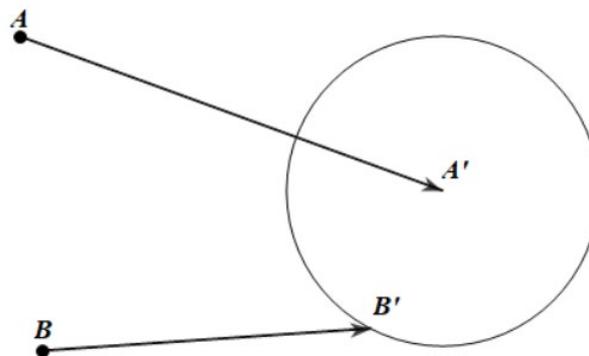
$$B(-1; -1; 0; 8) \xrightarrow{\vec{v}_2 = (0; 40; 0)} B'(-1; -1 + 40t; 0; 8)$$

$$- \text{Vậy } A'B'^2 = (60t - 3)^2 + (40t - 2,5)^2 + 0,3^2 \rightarrow \text{Casio} \left(\frac{d}{dx} \right) \rightarrow A'B'_{\min} \approx 0,51(km)$$

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mỗi đơn vị trên trục ứng với $10(km)$, trạm kiểm soát không lưu đang chạy theo dõi hai máy bay. Máy bay thứ nhất ban đầu ở tọa độ $A(25; -10; 1)$ và bay theo hướng vector $\vec{v}_1 = (-3; -4; 0)$ với tốc độ không đổi là $750(km/h)$. Máy bay thứ hai ban đầu ở tọa độ $B(30; -25; 1,1)$ và bay theo hướng vector $\vec{v}_2 = (-4; 3; 0)$ với tốc độ không đổi là $900(km/h)$. Trên máy bay thứ nhất có gắn Radar tránh va chạm với bán kính hoạt động là $50(km)$. Hỏi thời gian máy bay thứ hai xuất hiện trên màn hình của Radar máy bay thứ nhất là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 4,91



$$- \text{Ta có: } A(25; -10; 1) \xrightarrow{\vec{v}_1 = (-45; -60; 0)} A'(25 - 45t; -10 - 60t; 1)$$

$$B(30; -25; 1,1) \xrightarrow{\vec{v}_2 = (-72; 54; 0)} B'(30 - 72t; -25 + 54t; 1,1)$$

$$\rightarrow A'B' = \sqrt{(27t - 5)^2 + (114t - 15)^2 + (0,1)^2}$$

HẸN NHAU Ở CỐNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

- Mà vì bán kính hoạt động với phạm vi là $50(km) \rightarrow A'B' \leq 5$

- Hay $\rightarrow A'B'^2 \leq 25 \Leftrightarrow (27t-5)^2 + (114t-15)^2 + (0,1)^2 \leq 25$

$$\Leftrightarrow \frac{1230 - \sqrt{140339}}{9150} \leq t \leq \frac{1230 + \sqrt{140339}}{9150} \rightarrow t = \left(\frac{1230 + \sqrt{140339}}{9150} - \frac{1230 - \sqrt{140339}}{9150} \right) \cdot 60 \approx 4,91(\text{phút})$$

Câu 24: Trong không gian xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục lấy theo mét. **Anh Shiper Toán** điều khiển một chiếc máy bay xuất phát từ điểm O và bay với tốc độ không đổi, vector thể hiện độ dịch chuyển của máy bay sau mỗi giây là $\vec{u} = (4; -1; 3)$. Cùng thời điểm, chiếc máy bay không người lái xuất phát từ điểm $A(24; 12; 18)$ và bay với tốc độ không đổi là $2\sqrt{38}(m/s)$ theo hướng vecto $\vec{v} = (-2; 5; -3)$.



Trong 10 giây đầu tiên sau khi xuất phát, khoảng cách nhỏ nhất giữa hai chiếc máy bay được làm tròn đến hàng đơn vị là bao nhiêu mét.

Lời giải

Sau t giây thì vị trí của hai chiếc máy bay lần lượt là $(4t; -t; 3t)$ và $(24 - 4t; 12 + 10t; 18 - 6t)$.

Khoảng cách giữa hai chiếc máy bay khi đó là

$$\sqrt{(24 - 8t)^2 + (12 + 11t)^2 + (18 - 9t)^2} = \sqrt{266t^2 - 444t + 1044} > 0, \forall t.$$

Khảo sát hàm số trên ta được khoảng cách gần nhất giữa 2 máy bay là 29 m

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$ với mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy , đơn vị trên mỗi trục bằng 1km. **Anh Shiper Toán** điều khiển 2 drone quan sát khu vườn của nhà mình.



Chiếc thứ nhất xuất phát từ điểm $A(1; -2; 3)$ bay theo hướng vecto $\vec{a} = (3; 4; 0)$ với vận tốc $10km/h$. Chiếc thứ 2 xuất phát từ điểm $B(-1; 4; 2)$ có vecto vận tốc $(4; -5; 2)$. Cùng lúc đó anh đo được vận tốc của gió là $5km/h$ theo hướng vecto $\vec{b} = (1; 0; 0)$. Tìm vị trí đứng của anh **Shiper**, để sau 2 giờ, tổng khoảng cách đến 2 drone là nhỏ nhất.

Lời giải

HẸN NHAU Ở CÔNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

Vecto vận tốc của gió là $\vec{b}' = (5; 0; 0)$

Vecto vận tốc của drone thứ 1 khi chưa chịu tác động của gió là $\vec{a}' = \frac{(3; 4; 0)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} \cdot 10 = (6; 8; 0)$

Do đó nếu chịu tác động của gió thì vecto vận tốc của nó là \

$$\vec{v}_1 = \vec{a}' + \vec{b}' = (6; 8; 0) + (5; 0; 0) = (11; 8; 0)$$

Nên tọa độ của drone thứ nhất sau 2 giờ là $A'(11t + 1; 8t - 2; 3) = (23; 14; 3)$

Tương tự ta tìm được tọa độ của drone thứ hai sau 2 giờ là $B'(17; -6; 6)$

Giả sử vị trí đứng của anh Shiper là M thì cần tìm giá trị nhỏ nhất của $T = MA' + MB'$

Lấy A'' đối xứng với A' qua (Oxy) thì $A''(23; 14; -3)$

Khi đó $M(x; y; 0)$ và thỏa mãn A'', M, B' thẳng hàng

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A''B'} = (-6; -20; 9); \overrightarrow{A''M} = (x - 23; y - 14; 3)$$

$$\text{Nên } \frac{x - 23}{-6} = \frac{y - 14}{-20} = \frac{3}{9} \Rightarrow M\left(21; \frac{22}{3}; 0\right)$$

Câu 26: Trạm kiểm soát không quân đang theo dõi hai máy bay chiến đấu $Su-30$ và $MiG-31$. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là $1(km)$ và xem mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay chiến đấu $Su-30$ ở tọa độ $A(0; 35; 10)$ bay theo hướng vectơ $\vec{v}_1 = (3; 4; 0)$ với tốc độ không đổi là $900(km/h)$ và máy bay chiến đấu $MiG-31$ ở tọa độ $B(31; 10; 11)$, bay theo hướng của vectơ $\vec{v}_2 = (5; 12; 0)$ với tốc độ không đổi $910(km/h)$. Khu vực này có gió mạnh thổi với vận tốc bằng $80(km/h)$ theo hướng vectơ $\vec{u} = (-3; 0; 4)$, gió ảnh hưởng đến hai máy bay trong quá trình bay. Một khu vực không phận bị hạn chế bay đã được một quốc gia khác thiết lập, có dạng hình trụ với tâm đáy tại $C(178; 430; 0)$, bán kính đáy $7(km)$, trục vuông góc với mặt đất chiều và chiều cao $43(km)$, máy bay $MiG-31$ có nhiệm vụ bay vào khu vực không phận bị hạn chế để thăm dò.

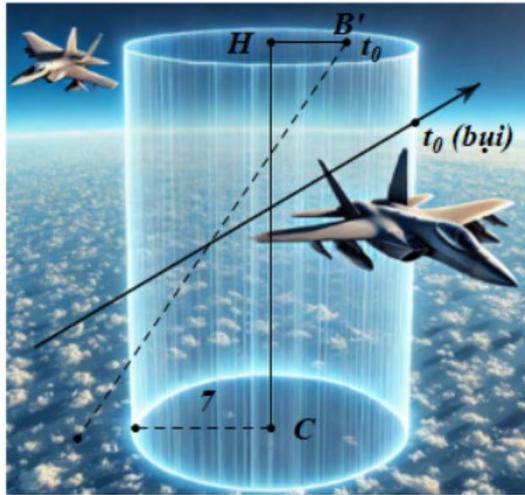


Tại thời điểm máy bay chiến đấu $MiG-31$ bay ra khỏi khu vực không phận bị hạn chế thì khoảng cách giữa 2 máy bay chiến đấu là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

HẸN NHAU Ở CỐNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC

Đáp án: 73



- Ta có: $\vec{v}_1 = (540; 720; 0) \xrightarrow{\vec{v}_1 = (-48; 0; 64)} \vec{v}_{1.Su-30} = (492; 720; 64)$

$Su-30: A(0; 35; 10) \xrightarrow{t} A'(492t; 35 + 720t; 10 + 64t)$

$\vec{v}_2 = (350; 840; 0) \xrightarrow{\vec{v}_1 = (-48; 0; 64)} \vec{v}_{2.MiG-31} = (302; 840; 64)$

$MiG-31: B(31; 10; 11) \xrightarrow{t} B'(31 + 302t; 10 + 840t; 11 + 64t)$

- Khi $t = t_0 \rightarrow z_{B'} = 43 \leftrightarrow 11 + 64t = 43 \rightarrow t = 0,5 \rightarrow B'(182; 430; 43)$ và $H(178; 420; 43)$

- Vậy $B'H = 4 < 7 \rightarrow$ thỏa mãn

- Với $t_0 = 0,5 \rightarrow \begin{cases} B'(182; 430; 43) \\ A'(246; 395; 41) \end{cases} \rightarrow A'B' \approx 73(km)$