

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH ĐỒNG NAI
Đơn vị THPT chuyên LƯƠNG THẾ VINH

Mã số:
(Do HĐCNSK cấp trên ghi)

BÁO CÁO SÁNG KIẾN

**PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN BÀI TOÁN THỰC TẾ
TRONG ĐỀ THI THPT QG 2026**

Người thực hiện: NGUYỄN HOÀNG VINH

Lĩnh vực nghiên cứu:

- Quản lý giáo dục: ☐
- Phương pháp giáo dục: ☐
- Phương pháp dạy học bộ môn: TOÁN ☒

(Ghi rõ tên lĩnh vực)

Có đính kèm: Các sản phẩm không thể hiện trong bản in sáng kiến

- ☐ Mô hình
- ☐ Phim ảnh
- ☐ Hiện vật khác (các phim, ảnh, sản phẩm phần mềm)

Năm học: 2025 - 2026

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU	2
1 Phương pháp tiếp cận bài toán thực tế trong đề ôn thi TNTHPT 2026	4
1.1 Phương pháp đặt ẩn	4
1.1.1 Thời gian trong bài toán thực tế	4
1.1.2 Bắt đầu từ việc đặt góc trong bài toán thực tế	20
1.2 Phương pháp suy luận logic và quy nạp toán học	28
1.3 Các bài toán có nội dung liên môn	33
2 Đánh giá về sáng kiến được tạo ra	40
2.1 Tính mới của sáng kiến	40
2.2 Hiệu quả áp dụng	41
2.3 Khả năng áp dụng của sáng kiến	41
3 Phần kết luận	42
3.1 Bài học kinh nghiệm	42
3.2 Kiến nghị và đề xuất	42

LỜI MỞ ĐẦU

Trong bối cảnh đổi mới căn bản và toàn diện giáo dục, cấu trúc đề thi Tốt nghiệp THPT năm 2026 đang có sự chuyển dịch mạnh mẽ từ kiểm tra kiến thức hàn lâm sang đánh giá năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn.

Các bài toán thực tế (Real-world problems) không còn dừng lại ở mức độ minh họa đơn giản mà đòi hỏi học sinh phải có tư duy mô hình hóa toán học (Mathematical Modeling) sắc bén để chuyển đổi ngôn ngữ đời sống sang ngôn ngữ toán học một cách tối ưu nhất.

Chuyên đề báo cáo “PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN BÀI TOÁN THỰC TẾ TRONG ĐỀ ÔN THI THPTQG 2026” được xây dựng nhằm hệ thống hóa các công cụ tư duy cốt lõi để giải quyết lớp bài toán này. Thay vì tiếp cận theo từng dạng bài riêng lẻ, chuyên đề đi sâu vào bản chất của quá trình mô hình hóa thông qua hai trụ cột phương pháp luận chính:

- 1) Kỹ thuật lựa chọn biến số tối ưu:** Phân tích chiến lược đặt ẩn phụ dựa trên bản chất chuyển động và hình học. Cụ thể là phương pháp biến thiên theo thời gian (t) đối với các bài toán vận tốc, lưu lượng (như bài toán chuyển động của kiến, thang trượt, bơm nước) và phương pháp biến thiên theo góc (α) để xử lý các bài toán cực trị trong không gian giới hạn (như bài toán thang xe cứu hỏa, khung tranh).
- 2) Tư duy suy luận logic và quy nạp toán học:** Trang bị kỹ năng phát hiện quy luật từ các giả thiết rời rạc. Thông qua phương pháp quy nạp và khai thác giả thiết, chuyên đề hướng dẫn cách thiết lập các công thức truy hồi, cấp số cộng, cấp số nhân để giải quyết các bài toán về tối ưu nguồn lực (điều xe chống lũ), quy luật trò chơi (chia kẹo, bốc bi) hay kết cấu kiến trúc cổ.

Với cách tiếp cận khoa học, chặt chẽ và đi thẳng vào bản chất vấn đề, chuyên đề này kỳ vọng sẽ là tài liệu tham khảo giá trị, cung cấp cho giáo viên và học sinh một tư duy mạch lạc để chinh phục các bài toán thực tế mang tính phân loại cao trong kỳ thi sắp tới.

Qua quá trình nghiên cứu và phân tích cấu trúc đề thi cũng như thực tiễn dạy và học, chúng tôi nhận diện ba vấn đề cốt lõi liên quan đến các bài toán thực tế trong chương trình ôn thi THPTQG 2026 như sau:

- 1) Tần suất xuất hiện và mức độ phân hóa cao trong đề thi:** Trong xu hướng đổi mới kiểm tra đánh giá, các bài toán thực tế (Real-world problems) đã trở thành một phần tất yếu trong ma trận đề thi tham khảo và đề thi chính thức của Bộ Giáo dục & Đào tạo, cũng như các kỳ thi thử của các trường THPT trọng điểm. Đây thường là nhóm câu hỏi nằm ở mức độ Vận dụng và Vận dụng cao, đóng vai trò then chốt trong việc phân loại thí sinh (đặc biệt là phân khúc điểm 8+ và 9+). Thực tế cho thấy, dù chiếm tỷ trọng số lượng không quá lớn, nhưng đây lại là “điểm nghẽn” khiến nhiều học sinh mất điểm đáng tiếc do tâm lý e ngại độ khó và áp lực thời gian.
- 2) Rào cản về tính “Lạ” và yêu cầu tư duy phá cách:** Khác với các bài toán đại số hay hình học thuần túy vốn có quy trình giải (algorithm) cố định, bài toán thực tế luôn mang tính “động” và tính “lạ”.
 - *Thách thức về đọc hiểu:* Đề bài thường dài, chứa đựng nhiều thông tin nhiễu hoặc các thuật ngữ chuyên môn hẹp (vật lý, kiến trúc, kinh tế...), đòi hỏi học sinh phải có kỹ năng lọc thông tin và mô hình hóa toán học.

- *Thách thức về tư duy:* Học sinh không thể áp dụng máy móc các công thức có sẵn (lỗi mòn tư duy). Thay vào đó, các em buộc phải vận dụng linh hoạt các công cụ toán học, từ việc thiết lập hàm số, đạo hàm tìm cực trị cho đến việc phát hiện quy luật dãy số để giải quyết vấn đề.

3) Sự thiếu hụt về hệ thống phương pháp luận trong tài liệu tham khảo: Mặc dù nguồn tài liệu ôn thi hiện nay rất phong phú, nhưng đa phần vẫn tồn tại những hạn chế nhất định khi tiếp cận mảng kiến thức này:

- *Thiếu tính hệ thống:* Các tài liệu chủ yếu dừng lại ở việc tuyển tập các bài toán và cung cấp lời giải chi tiết cho từng bài riêng lẻ.
- *Thiếu tính khái quát:* Chưa có nhiều tài liệu đi sâu vào phân tích bản chất, đúc kết thành quy trình tư duy hoặc phân loại phương pháp giải (như khi nào nên đặt ẩn theo thời gian, khi nào dùng góc, hay khi nào dùng quy nạp).

Điều này dẫn đến hệ quả là học sinh thường học theo kiểu “gặp bài nào biết bài đó”, thiếu khả năng tư duy độc lập để xử lý các bài toán mới lạ chưa từng gặp. Do đó, việc xây dựng một hệ thống phương pháp tiếp cận bài bản là yêu cầu cấp thiết.

1 Phương pháp tiếp cận bài toán thực tế trong đề ôn thi TNTHPT 2026

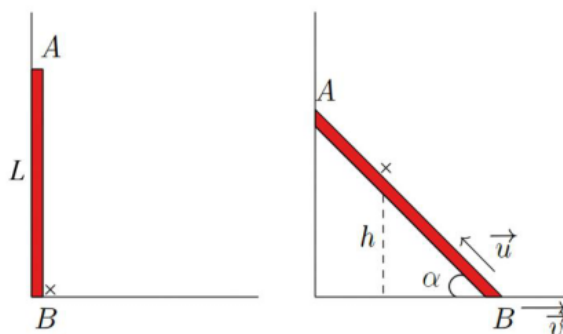
1.1 Phương pháp đặt ẩn

Với các bài toán thực tế có yếu tố tìm min – max, đặt ẩn là một bước đệm quan trọng và cần có sự tinh tế khéo léo nhằm làm quá trình tính toán trở nên đơn giản và nhẹ nhàng hơn, hoặc khai thác giả thiết một cách hiệu quả và sâu sắc hơn. Có nhiều cách đặt ẩn tùy vào giả thiết hoặc yêu cầu bài toán, tuy nhiên sau đây, tôi trình bày hai phương pháp chính được đúc kết trong quá trình giảng dạy.

1.1.1 Thời gian trong bài toán thực tế

Việc xem xét một thời điểm tổng quát khi xảy ra các biến cố đóng vai trò quan trọng trong tìm hiểu các hàm đại lượng theo thời gian t .

Bài toán 1. Một con kiến đậu ở đầu B của một thanh cứng mảnh AB có chiều dài L mét đang dựng cạnh một bức tường thẳng đứng (hình vẽ). Vào thời điểm mà đầu B bắt đầu chuyển động sang phải theo sàn ngang với vận tốc không đổi v (m/s) thì con kiến bắt đầu bò dọc theo thanh với vận tốc không đổi u (m/s) đối với thanh. Trong quá trình bò trên thanh, con kiến đạt được độ cao cực đại $h_{\max}$ là bao nhiêu mét đối với mặt sàn? Cho đầu A của thanh luôn tỳ lên tường thẳng đứng.



Hình 1: Minh họa Bài toán 1

Ý tưởng: Bằng cách xét tại thời điểm t (s), ta sẽ tính độ dài đoạn OA theo t và vị trí con kiến lúc này sẽ là C, tính độ dài BC rồi phối hợp hình vẽ để tìm ra h .

Lời giải. Với thời điểm t (s), ta có $OB = vt$, $BC = ut$ và theo Pytago ta cũng có

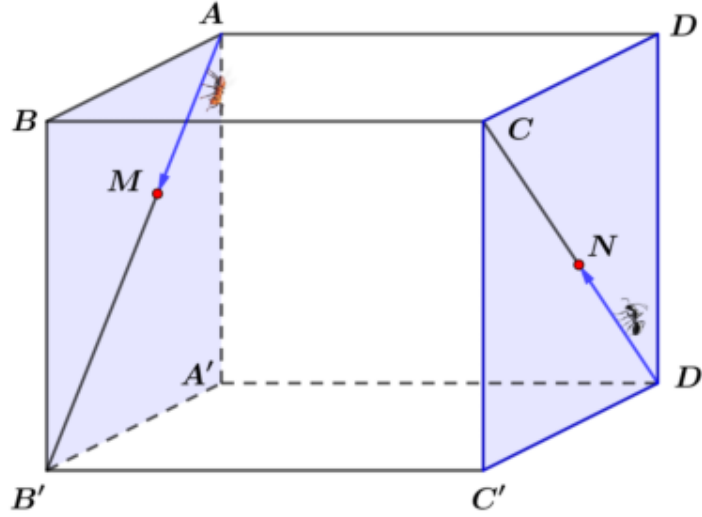
$$OA = \sqrt{L^2 - v^2 t^2}.$$

Theo định lý Thales ta có

$$\frac{h}{OA} = \frac{BC}{BA} \Leftrightarrow h = \frac{OA \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{L^2 - v^2 t^2} \cdot ut}{L} = f(t).$$

Bằng cách xét bảng biến thiên cho $f(t)$ ta có $\max f(t) = \frac{uL}{2v}$ và dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{L}{v\sqrt{2}}$. □

Bài toán 2. Một hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng L cm. Hai con kiến xuất phát tại cùng một thời điểm và đi theo đường thẳng với tốc độ không đổi. Biết rằng con kiến thứ nhất xuất phát từ điểm A và bò đến điểm B' với tốc độ a cm/s và con kiến thứ hai xuất phát từ điểm D' và bò đến điểm C với tốc độ b cm/s. Sau bao nhiêu giây kể từ khi xuất phát thì khoảng cách giữa hai con kiến là ngắn nhất?



Hình 2: Minh họa Bài toán 2

Lời giải.

• **Con kiến 1 (M):**

- Xuất phát: $A(0;0;L)$.
- Hướng di chuyển: Vectơ đơn vị $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.
- Vận tốc: a .
- Tọa độ tại thời điểm t :

$$x_M = \frac{at}{\sqrt{2}}, \quad y_M = 0, \quad z_M = L - \frac{at}{\sqrt{2}}.$$

• **Con kiến 2 (N):**

- Xuất phát: $D'(0;L;0)$.
- Hướng di chuyển: Vectơ đơn vị $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- Vận tốc: b .
- Tọa độ tại thời điểm t : $x_N = \frac{bt}{\sqrt{2}}, y_N = L, z_N = \frac{bt}{\sqrt{2}}.$

Xây dựng hàm khoảng cách tổng quát: Khoảng cách bình phương $d^2(t)$ giữa hai con kiến:

$$d^2(t) = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2.$$

Thay tọa độ vào:

$$d^2(t) = \frac{t^2(b-a)^2}{2} + L^2 + \left[\frac{t^2(b+a)^2}{2} - 2 \cdot L \cdot \frac{t(b+a)}{\sqrt{2}} + L^2 \right].$$

Thu gọn và đặt:

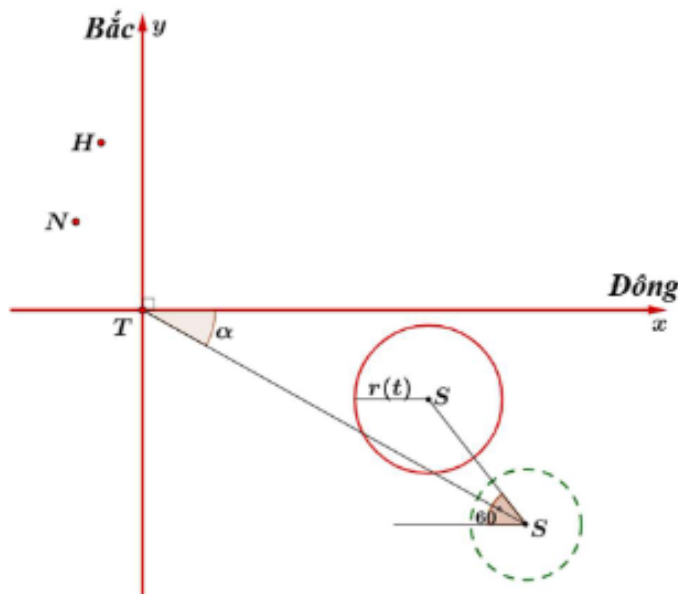
$$d^2(t) = f(t) = (a^2 + b^2)t^2 - [\sqrt{2}L(a+b)]t + 2L^2.$$

Từ đây suy ra thời gian hai con kiến gần nhau nhất là:

$$t = \frac{L(a+b)}{\sqrt{2}(a^2 + b^2)}.$$

□

Bài toán 3 (Thi thử Lê Thánh Tông Tp HCM 2026 lần II). Miền Trung Việt Nam vốn luôn phải oằn mình chống chọi với thiên tai. Giả sử trong một đợt áp thấp nhiệt đới mạnh lên thành bão, Trung tâm Dự báo Khí tượng Thủy văn Quốc gia phát đi thông báo khẩn về cơn bão số 4 có tên quốc tế là Sao La. Trên bản đồ quy hoạch phòng chống thiên tai được gắn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị đo là 10 km (hướng Đông là trục Ox, hướng Bắc là trục Oy), vị trí ba thành phố trọng điểm là Hà Tĩnh, Vinh (Nghệ An) và Thanh Hóa được xác định lần lượt tại các điểm $T(0;0)$, $N(-2;3)$ và $H(-1;5)$. Tại thời điểm bản tin phát đi, tâm bão Sao La đang ở ngoài khơi Biển Đông, cách thành phố Hà Tĩnh 200 km. Vị trí tâm bão nằm ở hướng Đông Nam so với Hà Tĩnh, tạo với phương Đông một góc α sao cho $\cos \alpha = 0,8$. Cơn bão di chuyển phức tạp theo hướng Tây Bắc lệch 60° so với hướng Tây với vận tốc 20 km/h. Sức tàn phá của bão rất lớn với vùng nguy hiểm là một hình tròn có bán kính ban đầu 20 km và liên tục mở rộng thêm 10 km mỗi giờ. Để lên phương án sơ tán dân cư đồng bộ, Ban chỉ đạo cần biết khoảng thời gian mà cả 3 thành phố này cùng nằm trong vùng nguy hiểm của bão Sao La kéo dài bao nhiêu giờ? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Hình 3: Minh họa Bài toán 3

Lời giải.

1. Chuyển đổi đơn vị và thiết lập thông số

Theo đề bài, hệ trục tọa độ có đơn vị đo là 10km (1dv = 10km). Ta quy đổi các đại lượng:

- Vận tốc bão: $v = 20 \text{ km/h} = 2 \text{ dv/h}$.
- Bán kính ban đầu: $R_0 = 20 \text{ km} = 2 \text{ dv}$.
- Tốc độ mở rộng: $10 \text{ km/h} = 1 \text{ dv/h}$.
- Tọa độ các thành phố: Hà Tĩnh $T(0;0)$, Vinh $N(-2;3)$, Thanh Hóa $H(-1;5)$.

2. Tọa độ tâm bão và bán kính theo thời gian t **a) Tọa độ tâm bão ban đầu S_0 (tại $t = 0$)**

Khoảng cách $TS = 200 \text{ km} = 20 \text{ dv}$. Tâm bão nằm theo hướng Đông Nam (góc phần tư IV), tạo với hướng Đông một góc α thỏa mãn

$$\cos \alpha = 0,8 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6$$

(do tung độ âm).

Suy ra tọa độ tâm bão ban đầu:

$$x_0 = 20 \cdot 0,8 = 16, \quad y_0 = 20 \cdot (-0,6) = -12.$$

Vậy $S_0(16; -12)$.

b) Vectơ vận tốc của bão

Hướng di chuyển là Tây Bắc, lệch 60° so với hướng Tây, nên góc hợp với trục Ox là 120° . Với $v = 2 \text{ dv/h}$, vectơ vận tốc là

$$\vec{v} = (2 \cos 120^\circ; 2 \sin 120^\circ) = (-1; \sqrt{3}).$$

c) Phương trình tâm bão và bán kính theo t

Tọa độ tâm bão tại thời điểm t :

$$S(t) \begin{cases} x_s = 16 - t, \\ y_s = -12 + t\sqrt{3}. \end{cases}$$

Bán kính vùng nguy hiểm:

$$R(t) = 2 + t.$$

d) Thời gian ảnh hưởng đến các thành phố

Điều kiện để một thành phố P nằm trong vùng nguy hiểm là

$$SP^2 \leq R^2(t).$$

Thiết lập và giải bất phương trình bậc hai theo t cho từng thành phố, ta được:

- Hà Tĩnh $T(0;0)$:

$$3t^2 - (36 + 24\sqrt{3})t + 396 \leq 0 \Rightarrow t \in [7,00; 18,86].$$

- Vinh $N(-2;3)$:

$$3t^2 - (40 + 30\sqrt{3})t + 545 \leq 0 \Rightarrow t \in [8,03; 22,62].$$

- Thanh Hóa $H(-1;5)$:

$$3t^2 - (38 + 34\sqrt{3})t + 574 \leq 0 \Rightarrow t \in [7,81; 24,48].$$

e) **Kết luận**

Thời gian cả ba thành phố cùng bị ảnh hưởng là giao của ba khoảng trên:

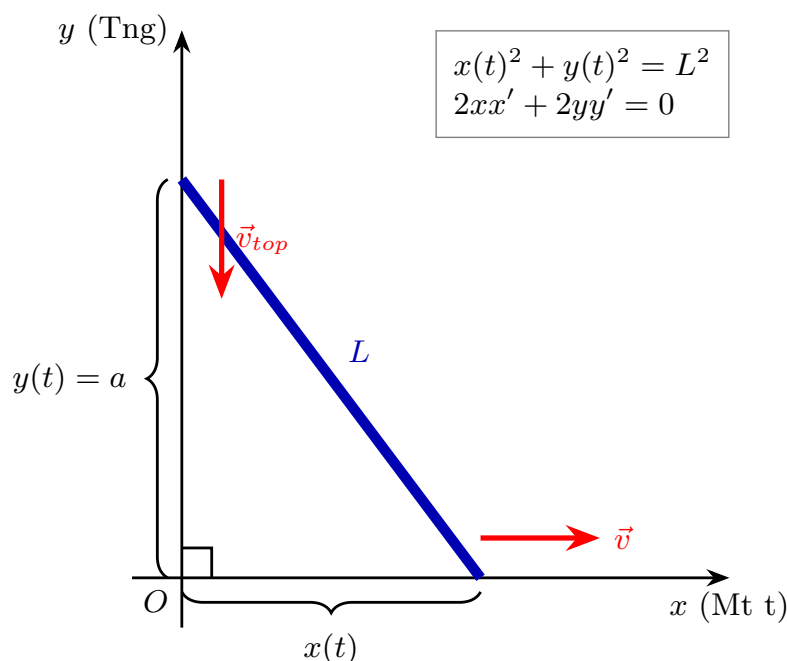
$$t \in [\max(7,00; 8,03; 7,81); \min(18,86; 22,62; 24,48)] = [8,03; 18,86].$$

Do đó tổng thời gian ảnh hưởng là

$$\Delta t = 18,86 - 8,03 = 10,83 \approx 10,8 \text{ (giờ)}.$$

□

Bài toán 4. Một chiếc thang dài L mét tựa vào bức tường thẳng đứng trên mặt đất bằng phẳng. Khi đầu dưới của thang di chuyển (trên mặt đất) ra xa bức tường với vận tốc không đổi là v (m/s) thì đầu trên của thang sẽ trượt xuống dọc theo bức tường. Khi điểm đầu thang cách mặt đất a mét thì vận tốc di chuyển tức thời của nó bằng bao nhiêu? (đơn vị m/s)



Hình 4: Minh họa Bài toán 4

Lời giải. Mô hình hoá bài toán

Giả sử bức tường trùng với trục tung Oy và mặt đất trùng với trục hoành Ox .

- Gọi $x(t)$ là khoảng cách từ chân thang đến chân tường tại thời điểm t .
- Gọi $y(t)$ là khoảng cách từ đầu trên của thang đến chân tường (độ cao) tại thời điểm t .

- Chiều dài thang là hằng số L .

Theo định lý Pytago trong tam giác vuông tạo bởi thang, tường và đất, ta luôn có mối liên hệ:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = L^2.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$x'(t) \cdot x(t) + y'(t) \cdot y(t) = 0.$$

Thay $x'(t) = v$ vào phương trình:

$$x \cdot v + y \cdot y'(t) = 0.$$

Suy ra vận tốc của đầu trên thang là:

$$y'(t) = -\frac{x \cdot v}{y} \quad (*)$$

Đề bài yêu cầu tính tốc độ khi đầu thang cách mặt đất một đoạn a mét. Tức là tại thời điểm $y = a$.

Ta cần tìm giá trị x tương ứng lúc này. Thay $y = a$ vào phương trình Pytago ban đầu:

$$x^2 + a^2 = L^2 \Rightarrow x = \sqrt{L^2 - a^2}.$$

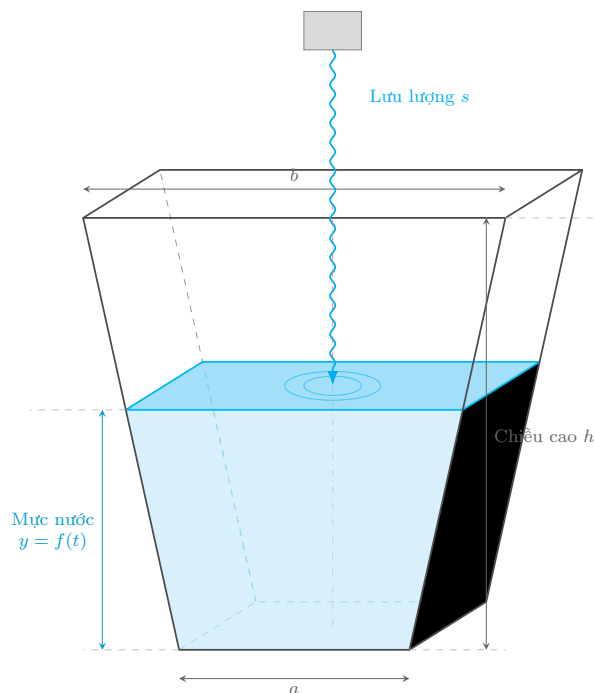
Thay $x = \sqrt{L^2 - a^2}$ và $y = a$ vào phương trình (*):

$$y'(t) = -\frac{\sqrt{L^2 - a^2} \cdot v}{a}.$$

Đáp số: $v_{tcthoi} = -\frac{v}{a} \sqrt{L^2 - a^2} (m/s).$

□

Bài toán 5. Một chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với chiều cao h (dm), cạnh đáy lần lượt là a (dm) và b (dm) ($a < b$). Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi s lít/phút. Sau t phút chiều cao nước trong chậu là $f(t)$ (dm), biết lúc đầu chậu không chứa nước, tìm $f(t)$.



Hình 5: Minh họa Bài toán 5

Lời giải.**1) Tính thể tích nước trong chậu tại thời điểm t**

Vì nước được bơm với lưu lượng không đổi s , thể tích nước V trong chậu sau t phút là: $V(t) = st$

2) Thiết lập công thức thể tích theo chiều cao y

Gọi y là chiều cao của mực nước tại thời điểm t ($0 \leq y \leq h$). Khối nước trong chậu cũng có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với:

- Chiều cao: y
- Cạnh đáy dưới: a
- Cạnh mặt nước (đáy trên của khối nước): Gọi là x .

Vì cạnh của hình chóp cụt biến thiên tuyến tính theo chiều cao, ta có mối quan hệ giữa cạnh mặt nước x và chiều cao y như sau:

$$x = a + \frac{b-a}{h}y.$$

Thể tích của khối nước (hình chóp cụt) tính theo công thức:

$$V = \frac{1}{3}y(a^2 + x^2 + ax) = \frac{1}{3}y \cdot \frac{x^3 - a^3}{x - a}.$$

Từ phương trình

$$x = a + \frac{b-a}{h}y.$$

Ta có

$$x - a = \frac{b-a}{h}y.$$

Thay thế $(x - a)$ vào mẫu số:

$$V = \frac{1}{3}y \cdot \frac{x^3 - a^3}{\frac{b-a}{h}y} = \frac{h}{3(b-a)}(x^3 - a^3)$$

Bây giờ, ta thay lại $x = a + \frac{b-a}{h}y$ vào phương trình trên để có công thức thể tích theo y :

$$V(t) = \frac{h}{3(b-a)} \left[\left(a + \frac{b-a}{h}y \right)^3 - a^3 \right]$$

3) Tìm hàm số $f(t)$

Ta cho thể tích tính theo hình học bằng thể tích nước bơm vào:

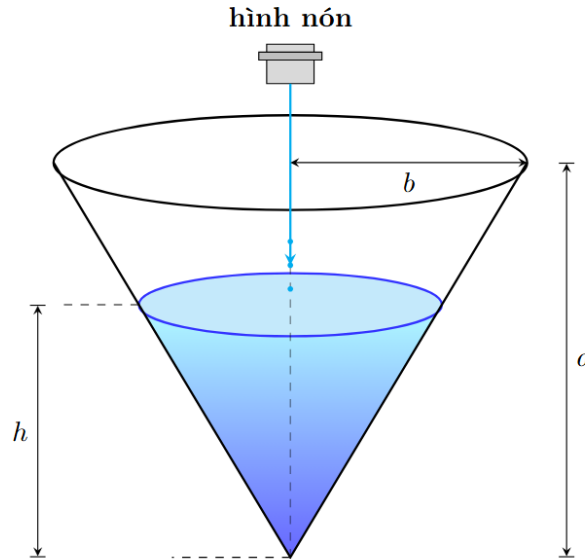
$$\frac{h}{3(b-a)} \left[\left(a + \frac{b-a}{h}y \right)^3 - a^3 \right] = st$$

Suy ra:

$$y = \frac{h}{b-a} \left(\sqrt[3]{a^3 + \frac{3s(b-a)t}{h}} - a \right) = f(t).$$



Bài toán 6. Một cái bể nước hình nón để ngược như hình vẽ, có chiều cao a cm, bán kính đáy bằng b cm. Một vòi nước chảy vào bể sao cho sau mỗi giây chiều cao mực nước tăng đều lên c cm cho đến khi đầy bể. Hãy tính tốc độ tăng thể tích (m^3/s) của nước tại thời điểm cách một giây ngay trước khi bể đầy. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hình 6: Minh họa Bài toán 6

Lời giải.

1) Thiết lập các hàm theo thời gian t

Gọi t (giây) là thời gian nước chảy vào. Chiều cao mực nước tăng đều c cm/s nên tại thời điểm t :

$$h(t) = ct \quad (\text{cm})$$

Dựa vào tam giác đồng dạng, bán kính mặt nước $r(t)$ tỉ lệ với chiều cao:

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{b}{a} \Rightarrow r(t) = \frac{b}{a} h(t) = \frac{bc}{a} t.$$

2) Xây dựng hàm thể tích $V(t)$

Thể tích khối nước hình nón là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Thay $r(t)$ và $h(t)$ vào, ta được:

$$V(t) = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{bc}{a} t \right)^2 (ct) = \frac{\pi b^2 c^3}{3a^2} t^3 \quad (\text{cm}^3).$$

3) Tính tốc độ tăng thể tích

Tốc độ tăng thể tích là đạo hàm của $V(t)$ theo t :

$$V'(t) = \frac{\pi b^2 c^3}{a^2} t^2 \quad (\text{cm}^3/\text{s}).$$

4) Xác định thời điểm cần tính

Bể đầy khi chiều cao nước đạt $h = a$:

$$c t_{\text{full}} = a \Rightarrow t_{\text{full}} = \frac{a}{c}.$$

Thời điểm một giây trước khi bể đầy:

$$t_0 = t_{\text{full}} - 1 = \frac{a}{c} - 1 = \frac{a - c}{c} \quad (\text{s}).$$

5) Tính giá trị cụ thể

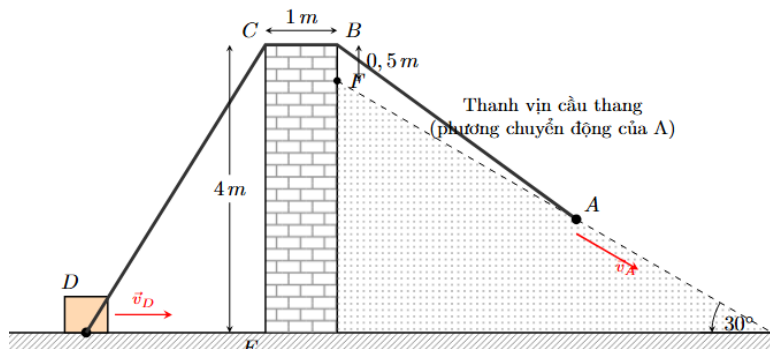
Thay t_0 vào công thức $V'(t)$:

$$V'(t_0) = \frac{\pi b^2 c^3}{a^2} \left(\frac{a - c}{c} \right)^2 = \frac{\pi b^2 c}{a^2} (a - c)^2 \quad (\text{cm}^3/\text{s}).$$

Lưu ý: Nếu đề bài yêu cầu đơn vị m^3/s thì nhân kết quả trên với 10^{-6} .

□

Bài toán 7. Một tên trộm đang cố gắng kéo thùng nữ trang qua một bức tường có độ dày $BC = 1 \text{ m}$; biết rằng tường cao 4 m và sợi dây được kéo theo đường gấp khúc $ABCD$ có độ dài không đổi bằng 20 m , đoạn $BF = 0,5 \text{ m}$. Trong khi kéo thì tên trộm luôn ghi đầu dây theo một thanh vịn của cầu thang (đầu dây dịch chuyển theo phương AF). Biết rằng thanh vịn cầu thang hợp với phương ngang một góc bằng 30° . Khi hai chú cảnh sát xuất hiện thì vị trí A cách F khoảng 6 m và thùng D tiến về phía E với tốc độ 1 m/s . Hỏi đầu dây A rời xa điểm F với tốc độ bao nhiêu m/s ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 7: Minh họa Bài toán 7

Lời giải. Đặt $DE = x \text{ (m)}$, $AF = y \text{ (m)}$. Ta có $CD = \sqrt{x^2 + 16}$ và $\widehat{AFB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Suy ra

$$AB^2 = y^2 + 0,5^2 - 2 \cdot y \cdot 0,5 \cdot \cos 120^\circ = y^2 + 0,25 + 0,5y.$$

Ta có phương trình chiều dài dây:

$$AB + 1 + CD = 20 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 0,5y + 0,25} + 1 + \sqrt{x^2 + 16} = 20.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 0,5y + 0,25} + \sqrt{x^2 + 16} = 19 \quad (*)$$

Thay $y = 6$ vào (*) ta được:

$$\sqrt{6^2 + 0,5 \cdot 6 + 0,25} + \sqrt{x^2 + 16} = 19 \Rightarrow \sqrt{39,25} + \sqrt{x^2 + 16} = 19 \Rightarrow x \approx 12,1(m)$$

(Lưu giá trị này vào biến nhớ A). Đạo hàm hai vế của (*) theo biến t ta được:

$$\frac{2y + 0,5}{2\sqrt{y^2 + 0,5y + 0,25}} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (**)$$

Thay $y = 6$; $x \approx 12,1$; $\frac{dx}{dt} = -1$ m/s (do x ngày càng giảm theo thời gian t) vào (**) ta tính được

$$\frac{dy}{dt} \approx 0,95 \text{ m/s.}$$

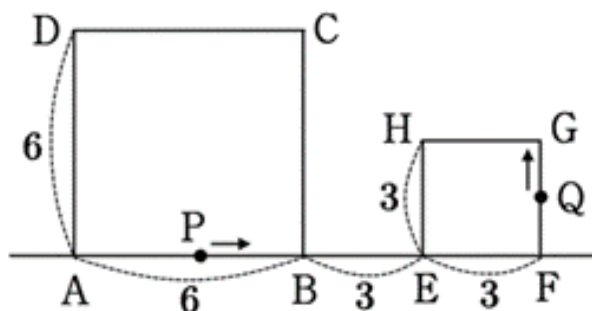
Vậy đầu dây A rời xa điểm F với tốc độ khoảng 0,95 m/s. $\square$

Bài toán 8. Như hình vẽ, hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 6 và hình vuông EFGH có độ dài cạnh bằng 3 được đặt trên đường thẳng AF.

Điểm P xuất phát từ điểm A, mỗi giây đi được 2 đơn vị dọc theo các cạnh của hình vuông ABCD theo thứ tự $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$.

Điểm Q xuất phát từ điểm F, mỗi giây đi được 1 đơn vị dọc theo các cạnh của hình vuông EFGH theo thứ tự $F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow F$.

Biết rằng $BE = 3$. Hỏi tốc độ biến thiên của PQ^2 tại thời điểm 4 giây sau khi hai điểm P, Q lần lượt xuất phát từ A, F bằng bao nhiêu?



Hình 8: Minh họa Bài toán 8

Lời giải. Khi biểu diễn tọa độ của P, Q sau t giây theo t , biểu thức sẽ khác nhau tùy theo khoảng của t , nên ta hãy tìm tọa độ của P, Q trong khoảng chứa $t = 4$.

Lấy điểm B làm gốc tọa độ, BC làm trục Oy , BF làm trục Ox .

Khi $3 \leq t \leq 6$, tọa độ của Q có thể viết là $(9 - t; 3)$. Cũng trong khoảng $3 \leq t \leq 6$, tọa độ của P có thể viết là $(0; 2t - 6)$.

Đặt $PQ^2 = f(t)$ thì:

$$\begin{aligned} f(t) &= (9 - t)^2 + (3 - (2t - 6))^2 \\ &= (9 - t)^2 + (9 - 2t)^2 \\ &= 5t^2 - 54t + 162 \end{aligned}$$

Ta có

$$\Rightarrow f'(t) = 10t - 54.$$

Do đó tại $t = 4$, thì $f'(4) = 10(4) - 54 = -14$.

TỔNG QUÁT: Ta sẽ nghiên cứu độ dài PQ ở thời điểm t trong chuyển động.

1) Thiết lập hệ quy chiếu và chu kỳ

- Hệ trục: Chọn gốc $B(0;0)$, trục hoành trùng đường thẳng AF , trục tung trùng cạnh BC .
- Chu kỳ (T):
 - Chu vi hình vuông $ABCD$ là 24, vận tốc P là 2 $\Rightarrow T_P = 12s$.
 - Chu vi hình vuông $EFGH$ là 12, vận tốc Q là 1 $\Rightarrow T_Q = 12s$.
- Chuyển động lặp lại mỗi 12 giây. Ta xét $t \in [0; 12]$.

2) Xác định tọa độ và tính PQ^2 theo từng giai đoạn Vì hướng di chuyển thay đổi tại các đỉnh, ta chia làm 4 giai đoạn (mỗi giai đoạn 3 giây).a) Giai đoạn $0 \leq t \leq 3$ ($P \in AB, Q \in FG$):

- $P(-6+2t; 0); Q(6; t)$
- $PQ^2 = (6 - (-6+2t))^2 + (t - 0)^2 = (12-2t)^2 + t^2 \Rightarrow PQ^2 = 5t^2 - 48t + 144$

b) Giai đoạn $3 \leq t \leq 6$ ($P \in BC, Q \in GH$):

- $P(0; 2t-6); Q(9-t; 3)$
- $PQ^2 = (9-t)^2 + (3-(2t-6))^2 = (9-t)^2 + (9-2t)^2 \Rightarrow PQ^2 = 5t^2 - 54t + 162$

c) Giai đoạn $6 \leq t \leq 9$ ($P \in CD, Q \in HE$):

- $P(12-2t; 6); Q(3; 9-t)$
- $PQ^2 = (3-(12-2t))^2 + (9-t-6)^2 = (2t-9)^2 + (3-t)^2 \Rightarrow PQ^2 = 5t^2 - 42t + 90$

d) Giai đoạn $9 \leq t \leq 12$ ($P \in DA, Q \in EF$):

- $P(-6; 24-2t); Q(3-(t-9); 0) = (12-t; 0)$
- $PQ^2 = (12-t-(-6))^2 + (0-(24-2t))^2 = (18-t)^2 + (2t-24)^2 \Rightarrow PQ^2 = 5t^2 - 96t + 576$

Công thức tổng quát: Độ dài bình phương đoạn thẳng PQ tại thời điểm t ($0 \leq t \leq 12$) là:

$$PQ^2(t) = \begin{cases} 5t^2 - 48t + 144 & \text{khi } 0 \leq t \leq 3 \\ 5t^2 - 54t + 162 & \text{khi } 3 \leq t \leq 6 \\ 5t^2 - 42t + 90 & \text{khi } 6 \leq t \leq 9 \\ 5t^2 - 96t + 576 & \text{khi } 9 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

□

Bài toán 9. Trong tương lai, một khinh khí cầu Z đang ở đúng vị trí cách tháp cao 584 m về phía tây và 812 m về phía nam, ở độ cao 344 m so với mặt đất (các số liệu đều tính cho tâm của Z). Thuyền trưởng muốn bay qua quảng trường và cho tàu đi theo hướng về phía tháp cao. Z trôi theo một đường thẳng, mỗi giây dịch chuyển 3 m về phía đông và 4 m về phía bắc, đồng thời hạ xuống 1 m mỗi giây. Đường kính ngang của Z là 24 m. Đường kính ngang của tháp tại độ cao h (tính bằng mét) cho bởi công thức $d(h) = 872 - 6h$ (m).

Trong quá trình bay theo quỹ đạo trên, khi khoảng cách giữa bề mặt Z và bề mặt tháp nhỏ nhất thì độ cao của Z là bao nhiêu mét?

Bán kính Z :

$$R_Z = \frac{24}{2} = 12 \text{ m.} \quad (4)$$

Từ (1) và (3) ta có:

$$R_{\text{tháp}}(h(t)) = \frac{872 - 6(344 - t)}{2} = \frac{872 - 2064 + 6t}{2} = \frac{6t - 1192}{2}. \quad (5)$$

Tại thời điểm t , khoảng cách giữa hai bề mặt (theo phương ngang) là:

$$\Delta(t) = r(t) - (R_{\text{tháp}}(h(t)) + R_Z) \quad (6)$$

Thay (2), (4), (5) vào (6) ta được:

$$\Delta(t) = 5\sqrt{(t-200)^2 + 16} - \left(\frac{6t-1192}{2} + 12\right).$$

Lấy đạo hàm:

$$\Delta'(t) = \frac{5(t-200)}{\sqrt{(t-200)^2 + 16}} - 3.$$

Giải phương trình $\Delta'(t) = 0$:

$$\frac{5(t-200)}{\sqrt{(t-200)^2 + 16}} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{5(t-200)}{\sqrt{(t-200)^2 + 16}} = 3$$

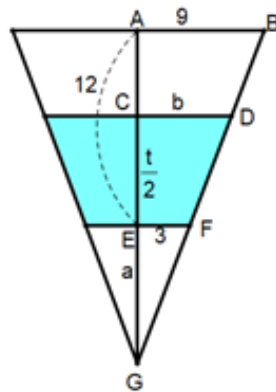
Đặt $u = t - 200$ (điều kiện $u > 0$)

$$\frac{5u}{\sqrt{u^2 + 16}} = 3 \Rightarrow 25u^2 = 9(u^2 + 16) \Rightarrow 25u^2 = 9u^2 + 144 \Rightarrow 16u^2 = 144 \Rightarrow u^2 = 9 \Rightarrow u = 3.$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra được khoảng cách giữa hai bề mặt nhỏ nhất khi $t = 200 + 3 = 203$ (giây).

Độ cao tương ứng: $h_{\min} = h(203) = 344 - 203 = 141(m)$. □

Bài toán 10. Như hình bên phải, ta có một cái cốc dạng hình nón cụt: bán kính miệng bằng 9 cm, bán kính đáy bằng 3 cm, chiều cao bằng 12 cm. Người ta rót nước vào cốc sao cho mực nước tăng đều với tốc độ 0,5 cm mỗi giây. Hỏi tốc độ biến thiên thể tích nước trong cốc tại thời điểm mực nước bằng một nửa chiều cao của cốc bằng bao nhiêu cm^3/s (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). (Bỏ qua bề dày thành cốc)



Hình 10: Minh họa Bài toán 10

Lời giải. Đặt t (giây) là thời gian đã trôi qua và h (cm) là chiều cao mực nước, ta có $h = \frac{1}{2}t$.

Mặt khác, như hình vẽ, ta ghép thêm phần nón phía dưới để được một hình nón lớn. Khi đó $AB = 9$ cm, $EF = 3$ cm, $AE = 12$ cm, $CE = \frac{1}{2}t$ cm.

Gọi $EG = a$ (cm). Khi đó, do $\triangle AGB \sim \triangle EGF$ nên:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AG}{EG} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{12+a}{a}.$$

Suy ra $3(12+a) = 9a \Rightarrow 6a = 36 \Rightarrow a = 6$ (cm).

Lại gọi $CD = b$ (cm). Khi đó, do $\triangle CGD \sim \triangle EGF$ nên:

$$\frac{CD}{EF} = \frac{CG}{EG} \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{\frac{1}{2}t+6}{6}.$$

Suy ra:

$$b = 3\left(\frac{1}{12}t + 1\right) \Rightarrow b = \frac{1}{4}t + 3 \text{ (cm)}$$

(Lưu ý: File gốc ghi đoạn biến đổi $b = \frac{1}{4}t + 3$ trực tiếp sau biểu thức tỉ lệ).

Gọi V là thể tích nước trong cốc. Do đó:

$$V = \frac{1}{3}\pi b^2 \cdot CG - \frac{1}{3}\pi EF^2 \cdot EG = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{4}t + 3\right)^2 \left(\frac{1}{2}t + 6\right) - \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6.$$

Hay:

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{4}t + 3\right)^2 \cdot 2\left(\frac{1}{4}t + 3\right) - 18\pi = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{4}t + 3\right)^3 - 18\pi.$$

(Đoạn này tôi viết lại công thức cho gọn dựa trên kết quả đạo hàm bên dưới).

Lấy đạo hàm theo t , ta được:

$$V'(t) = \frac{2\pi}{3} \cdot 3\left(\frac{1}{4}t + 3\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4}t + 3\right)^2.$$

Mực nước trong cốc tăng đều 0,5 cm mỗi giây. Mực nước bằng một nửa chiều cao cốc khi:

$$\frac{1}{2}t = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow t = 12.$$

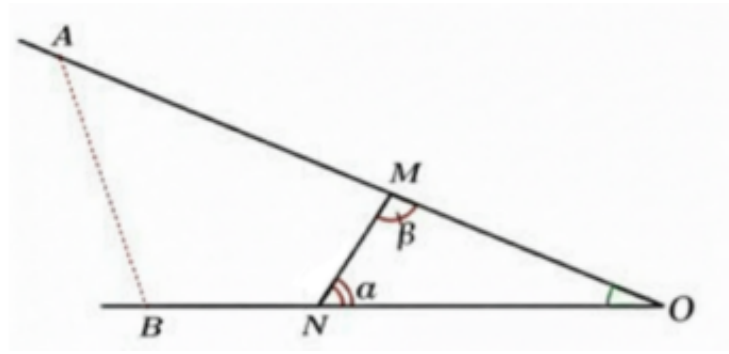
Vì $t = 12$ ở thời điểm cần xét nên:

$$V'(12) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot 12 + 3\right)^2 = \frac{\pi}{2} (3+3)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 36 = 18\pi \approx 56,5 \text{ (cm}^3/\text{s)}.$$

Vậy tại thời điểm mực nước bằng một nửa chiều cao của cốc, thể tích nước trong cốc tăng với tốc độ $18\pi \text{ cm}^3/\text{s}$.

□

Bài toán 11. Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O với vận tốc $v_B = kv_A$ và góc $\widehat{AOB} = \alpha > 0^\circ$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì số đo góc $\widehat{BAO} = \varphi$. Tìm $\tan \varphi$ theo k, α .



Hình 11: Minh họa Bài toán 11

Ý tưởng: Ta vẫn tiếp tục xét ở thời điểm t (s), tập trung vào tính toán độ dài OM , ON và tính độ dài MN .

Lời giải. Gọi v là vận tốc của chất điểm A . Suy ra vận tốc của B là kv .

Giả sử tại thời điểm ban đầu ($t = 0$), khoảng cách của A và B đến O lần lượt là a_0 và b_0 .

Tại thời điểm t , quãng đường các chất điểm đi được lần lượt là vt và $kv t$.

Khi đó, khoảng cách từ các chất điểm đến gốc O tại thời điểm t là:

$$OA = x(t) = a_0 - vt; \quad OB = y(t) = b_0 - kv t.$$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác AOB , bình phương khoảng cách giữa hai chất điểm là hàm số $f(t)$:

$$f(t) = AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \alpha.$$

Thay các biểu thức phụ thuộc t vào:

$$f(t) = (a_0 - vt)^2 + (b_0 - kv t)^2 - 2(a_0 - vt)(b_0 - kv t) \cos \alpha.$$

Để khoảng cách AB nhỏ nhất thì $f(t)$ đạt cực tiểu. Ta tính đạo hàm $f'(t)$ và cho bằng 0:

$$[f(t)]' = [x(t)^2]' + [y(t)^2]' - 2 \cos \alpha [x(t)y(t)]' = 0.$$

Áp dụng quy tắc đạo hàm hợp (với $x' = -v$ và $y' = -kv$):

$$2x(t)(-v) + 2y(t)(-kv) - 2 \cos \alpha [x'(t)y(t) + x(t)y'(t)] = 0.$$

Thay x' , y' vào và rút gọn:

$$-2vx - 2kvy - 2 \cos \alpha [-vy - kvx] = 0.$$

Chia cả hai vế cho $-2v$ (vì $v \neq 0$):

$$x + ky - \cos \alpha (y + kx) = 0,$$

$$\Rightarrow x + ky - y \cos \alpha - kx \cos \alpha = 0,$$

$$\Rightarrow x(1 - k \cos \alpha) = y(\cos \alpha - k).$$

Suy ra:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha - k}{1 - k \cos \alpha} = \frac{k - \cos \alpha}{k \cos \alpha - 1}.$$

Khi đó:

$$\tan \varphi = \tan \widehat{BAO} = \frac{BH}{AH} = \frac{y \sin \alpha}{x - y \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\frac{x}{y} - \cos \alpha}.$$

Thay tỉ số $\frac{x}{y}$ vừa tìm được vào:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \alpha}{\frac{k - \cos \alpha}{k \cos \alpha - 1} - \cos \alpha} = \cot \alpha - \frac{1}{k \sin \alpha}.$$

□

Bài toán 12. Góc tọa độ là điểm xuất phát đồng thời của hai điểm P, Q chuyển động trên một đường thẳng (đơn vị độ dài: mét, đơn vị thời gian: giây). Gọi vận tốc của chúng ở thời điểm t lần lượt là $v_1(t), v_2(t)$ thì

$$v_1(t) = -2t - 1, \quad v_2(t) = 3t^2 + 1.$$

Gọi R là trung điểm của đoạn PQ tại mọi thời điểm.

- Tọa độ của điểm Q tại thời điểm $t = 1$ bằng 1.
- Vận tốc của trung điểm R tại thời điểm $t = 1$ là 1 m/s.
- R đi qua gốc tọa độ tại đúng hai thời điểm $t = 0$ và $t = 1$.
- Quãng đường mà điểm R đi được từ $t = 0$ đến khi nó lại đi qua gốc tọa độ là $\frac{2}{27}$.

Lời giải. Vì hai điểm P, Q xuất phát đồng thời từ gốc tọa độ và chuyển động trên đường thẳng, nên nếu vận tốc của chúng ở thời điểm t là

$$v_1(t) = -2t - 1, \quad v_2(t) = 3t^2 + 1$$

thì vị trí của chúng là

$$x_1(t) = -t^2 - t, \quad x_2(t) = t^3 + t.$$

- Sai.** Tọa độ của điểm Q tại thời điểm $t = 1$ là $x_2(1) = 2$.
- Sai.** Vị trí và vận tốc của trung điểm R của đoạn PQ , ký hiệu lần lượt là $x(t), v(t)$, là

$$x(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 - t$$

nên tại thời điểm $t = 1$ thì vận tốc bằng 0,5 m/s.

- Đúng.** Thời điểm điểm R đi qua gốc tọa độ lần thứ hai được xác định bởi

$$x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

- Sai.** Quãng đường mà điểm R đi được cho đến khi lại đi qua gốc tọa độ là

$$S = \int_0^1 |v(t)| dt = \int_0^1 \left| \frac{3}{2}t^2 - t \right| dt = \int_0^1 \left(t - \frac{3}{2}t^2 \right) dt$$

(Vì trong khoảng $(0; \frac{2}{3})$ vận tốc âm và $(\frac{2}{3}; 1)$ vận tốc dương, ta cần phá trị tuyệt đối cẩn thận. Xét dấu $v(t) = t(\frac{3}{2}t - 1)$: $v(t) < 0$ với $t \in (0; \frac{2}{3})$ và $v(t) > 0$ với $t \in (\frac{2}{3}; 1)$).

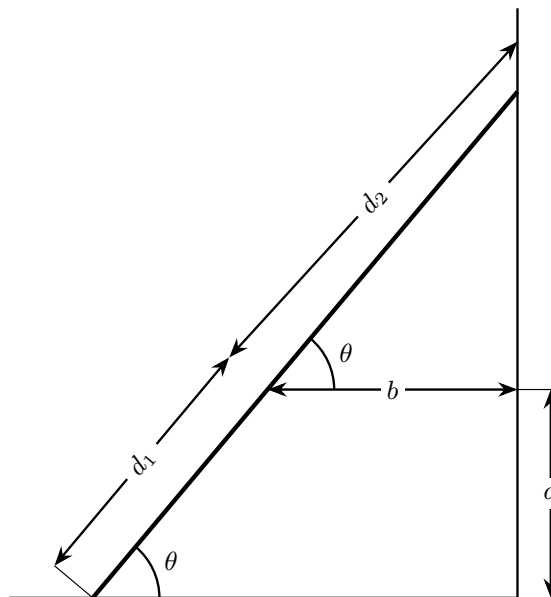
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2/3} \left(t - \frac{3}{2}t^2\right) dt + \int_{2/3}^1 \left(\frac{3}{2}t^2 - t\right) dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}\right) \Big|_0^{2/3} + \left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2}\right) \Big|_{2/3}^1 \\ &= \left(\frac{2}{9} - \frac{4}{27}\right) + \left[0 - \left(\frac{4}{27} - \frac{2}{9}\right)\right] \\ &= \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

□

1.1.2 Bắt đầu từ việc đặt góc trong bài toán thực tế

So với độ dài, việc đặt góc để tính toán và biến đổi có nhiều lợi thế hơn về việc tìm ra hàm số liên kết các giả thiết ở dạng đơn giản, các quan hệ về đồng dạng được khai thác triệt để và dễ quan sát. Tuy nhiên sẽ khó khăn trong việc xét hàm số để tìm ra điểm cực trị.

Bài toán 13. Hình bên mô tả một mặt cắt ngang của một tòa nhà cao tầng. Một chiếc thang từ xe cứu hỏa lên đến mặt tường phía trước của tòa nhà phải vượt qua phần mái che cao $a(m)$ so với mặt đất và vùng mái này nhô ra $b(m)$ so với tường. Giả sử, độ cao của xe cứu hỏa là không đáng kể, hãy tìm độ dài ngắn nhất của chiếc thang để các lính cứu hỏa có thể thực hiện nhiệm vụ này.



Hình 12: Minh họa Bài toán 14

Lời giải.

1. Thiết lập hàm số độ dài Độ dài chiếc thang L là tổng của hai đoạn:

- Đoạn từ mặt đất đến mái hiên (d_1): $d_1 = \frac{a}{\sin \theta}$
- Đoạn từ mái hiên đến tường (d_2): $d_2 = \frac{b}{\cos \theta}$

Vậy hàm số độ dài thang theo góc θ là:

$$L(\theta) = \frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta}.$$

2. Tính đạo hàm

Để tìm độ dài ngắn nhất (cực tiểu), ta tính đạo hàm của L theo θ :

$$L'(\theta) = -\frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{b \sin \theta}{\cos^2 \theta}.$$

Hoặc viết lại theo dạng cot và tan:

$$L'(\theta) = -\frac{a}{\sin \theta} \cot \theta + \frac{b}{\cos \theta} \tan \theta.$$

3. Tìm điểm cực trị

Cho $L'(\theta) = 0$:

$$\frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{b \sin \theta}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \tan^3 \theta = \frac{a}{b}.$$

Suy ra góc tối ưu thỏa mãn:

$$\tan \theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

4. Tính độ dài ngắn nhất (Công thức tổng quát)

Từ $\tan \theta = \frac{a^{1/3}}{b^{1/3}}$, ta có thể biểu diễn $\sin \theta$ và $\cos \theta$ thông qua tam giác vuông:

$$\sin \theta = \frac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}, \quad \cos \theta = \frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}.$$

Thay vào phương trình $L(\theta)$ ban đầu:

$$L_{\min} = \frac{a}{\frac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}} + \frac{b}{\frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}} = a^{2/3} \sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}} + b^{2/3} \sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}.$$

Rút gọn biểu thức:

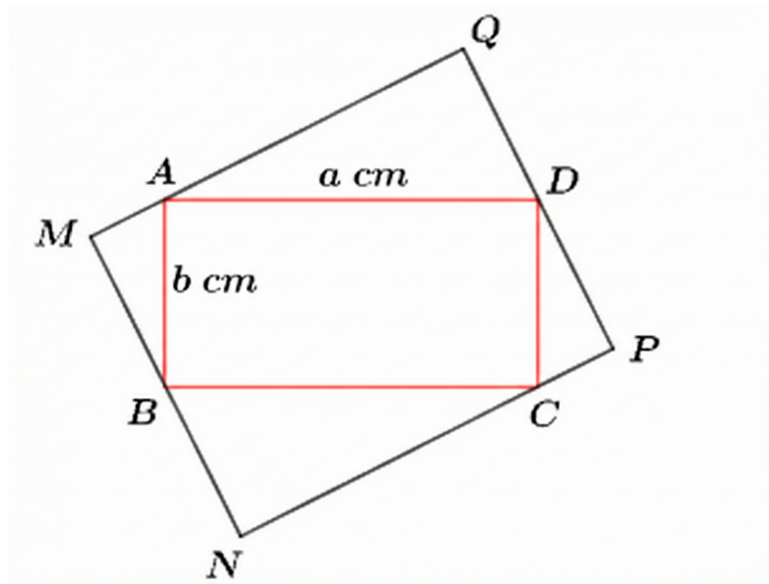
$$L_{\min} = (a^{2/3} + b^{2/3}) \sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}} = (a^{2/3} + b^{2/3})^1 \cdot (a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2}.$$

Kết quả cuối cùng: Độ dài ngắn nhất của chiếc thang là

$$L_{\min} = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$



Bài toán 14. Bà Bích xin một “chữ Tâm” được sơn son thếp vàng trong một hình chữ nhật $ABCD$ kích thước $a \text{ cm} \times b \text{ cm}$. Bà treo bức tranh này trên tường. Để tăng điểm nhấn cho bức tranh, bà trang trí một khung hình cách điệu là hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho các điểm A, B, C, D lần lượt thuộc các cạnh QM, MN, NP, PQ (xem hình vẽ). Bà muốn phần diện tích chiếm chỗ của hình chữ nhật $MNPQ$ trên tường là lớn nhất (cân đối nhất). Hỏi diện tích lớn nhất đó bằng bao nhiêu cm^2 ?



Hình 13: Minh họa Bài toán 15

Lời giải.

1. Thiết lập biến số và các hệ thức lượng Đặt $\widehat{QAD} = x$ với điều kiện $0^\circ < x < 90^\circ$.

Xét tam giác vuông $\triangle AQD$ (vuông tại Q):

$$AQ = AD \cdot \cos x = a \cdot \cos x \quad \text{và} \quad QD = AD \cdot \sin x = a \cdot \sin x.$$

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{MAB} = 180^\circ - 90^\circ - x = 90^\circ - x$

Xét tam giác vuông $\triangle AMB$ (vuông tại M):

- $AM = AB \cdot \cos(90^\circ - x) = AB \cdot \sin x = b \cdot \sin x$
- $MB = AB \cdot \sin(90^\circ - x) = AB \cdot \cos x = b \cdot \cos x$

Do tính chất đối xứng của hình chữ nhật, ta dễ dàng suy ra: Chiều rộng của hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$MQ = AM + AQ = b \sin x + a \cos x.$$

Chiều dài của hình chữ nhật $MNPQ$: Vậy

$$MN = MB + BN = b \cos x + a \sin x.$$

2. Xây dựng hàm diện tích

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$$S(x) = MQ \cdot MN = (a \cos x + b \sin x)(a \sin x + b \cos x).$$

Khai triển biểu thức:

$$S(x) = a^2 \cos x \sin x + ab \cos^2 x + ab \sin^2 x + b^2 \sin x \cos x,$$

$$S(x) = (a^2 + b^2) \sin x \cos x + ab(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Sử dụng các công thức lượng giác $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ và $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, ta được:

$$S(x) = ab + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sin 2x.$$

3. Tìm giá trị lớn nhất

Để diện tích $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất, biểu thức $\sin 2x$ phải đạt giá trị lớn nhất. Ta biết rằng với mọi góc $2x$, ta luôn có $\sin 2x \leq 1$.

Dấu “=” xảy ra khi:

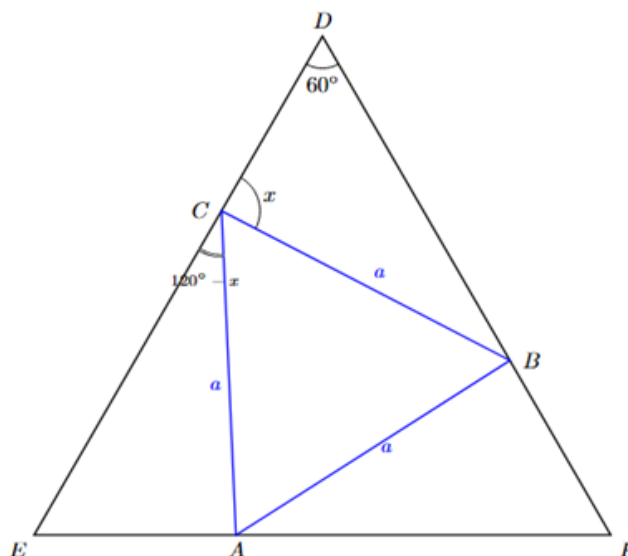
$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 90^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ.$$

Khi đó, giá trị lớn nhất của diện tích là:

$$S_{\max} = ab + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{2ab + a^2 + b^2}{2} = \frac{(a + b)^2}{2}.$$

□

Bài toán 15. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Dựng tam giác đều DEF ngoại tiếp tam giác ABC sao cho ba đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên ba cạnh của tam giác DEF . Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác DEF .



Hình 14: Minh họa Bài toán 16

Lời giải.

- 1. Thiết lập biến số và các góc** Giả sử ba đỉnh A, B, C lần lượt thuộc ba cạnh EF, FD, DE của tam giác DEF . Đặt $\widehat{DCB} = x$ với điều kiện $0^\circ < x < 120^\circ$.

Vì tam giác ABC là tam giác đều nên $\widehat{BCA} = 60^\circ$. Xét điểm C nằm trên đoạn thẳng DE , ta có góc bẹt $\widehat{DCE} = 180^\circ$. Suy ra góc $\widehat{ECA}$ được tính như sau: $\widehat{ECA} = 120^\circ - x$.

2. Tính cạnh của tam giác lớn theo biến x

Xét hai tam giác nhỏ ở góc là $\triangle BDC$ và $\triangle CEA$. Do tam giác DEF đều nên $\widehat{D} = \widehat{E} = 60^\circ$.

- Xét trong $\triangle BDC$, ta có

$$\widehat{DBC} = 180^\circ - \widehat{D} - \widehat{DCB} = 180^\circ - 60^\circ - x = 120^\circ - x.$$

Áp dụng định lý hàm số Sin cho tam giác $\triangle BDC$ với cạnh $BC = a$:

$$\frac{DC}{\sin(120^\circ - x)} = \frac{BC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow DC = \frac{a \cdot \sin(120^\circ - x)}{\sin 60^\circ} = \frac{2a \sin(120^\circ - x)}{\sqrt{3}}.$$

- Xét trong $\triangle CEA$, ta có

$$\widehat{EAC} = 180^\circ - \widehat{E} - \widehat{ECA} = 180^\circ - 60^\circ - (120^\circ - x) = x.$$

Áp dụng định lý hàm số Sin với cạnh $AC = a$:

$$\frac{CE}{\sin x} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow CE = \frac{a \cdot \sin x}{\sin 60^\circ} = \frac{2a \sin x}{\sqrt{3}}.$$

3. Xây dựng hàm độ dài cạnh tam giác DEF

Gọi cạnh của tam giác đều DEF là L . Ta có $L = DE = DC + CE$. Thế các kết quả tính được ở trên vào:

$$L(x) = \frac{2a}{\sqrt{3}} [\sin(120^\circ - x) + \sin x].$$

Biến đổi lượng giác

$$\sin(120^\circ - x) = \sin 120^\circ \cos x - \cos 120^\circ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x.$$

Thay vào biểu thức của $L(x)$:

$$L(x) = \frac{2a}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right).$$

Rút gọn biểu thức về dạng sin tổng:

$$L(x) = a(\cos x + \sqrt{3} \sin x) = 2a \sin(x + 30^\circ).$$

4. Tìm giá trị lớn nhất

Diện tích tam giác đều DEF được tính bằng công thức:

$$S_{DEF} = \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Để diện tích lớn nhất thì cạnh L phải lớn nhất. Từ biểu thức $L(x) = 2a \sin(x + 30^\circ)$, ta thấy giá trị này lớn nhất khi

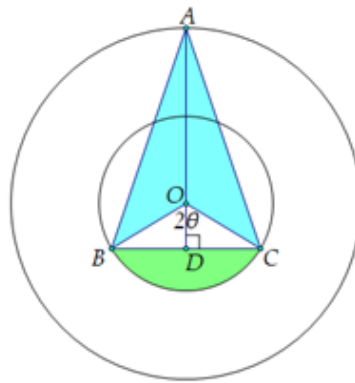
$$\sin(x + 30^\circ) = 1 \Leftrightarrow x + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ.$$

Khi $x = 60^\circ$, độ dài cạnh lớn nhất là:

$$L_{\max} = 2a.$$

□

Bài toán 16. Như hình, một huy hiệu kỉ niệm có cấu trúc gồm hai đường tròn đồng tâm bán kính lần lượt 1 cm và 2 cm, tâm O . Tam giác cân ABC có đỉnh A nằm trên đường tròn ngoài, hai điểm B, C nằm trên đường tròn trong; O và A nằm cùng phía đối với đường thẳng BC . Gọi S_1 là diện tích hình quạt-dây (phần giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC), gọi S_2 là tổng diện tích của $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$. Khi $S_2 - S_1$ đạt giá trị lớn nhất thì huy hiệu đẹp nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất đó? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, đơn vị cm^2)



Hình 15: Minh họa Bài toán 17

Lời giải. Đặt $\widehat{BOC} = 2\theta \in (0, \pi)$ nên $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Kẻ $OD \perp BC$ tại D . Khi đó D là trung điểm của BC . Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên A, O, D thẳng hàng. Lại có

$$\widehat{BOA} = \widehat{AOC} = \pi - \theta.$$

Vì $OB = OC = 1$, nên

$$S_1 = \text{diện tích quạt } BOC - \text{diện tích } \triangle BOC = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin 2\theta = \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

Còn

$$S_2 = 2 \cdot S_{\triangle OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(\widehat{AOB}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin(\pi - \theta) = 2 \sin \theta.$$

Vì thế

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\theta \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin 2\theta = \theta - \sin \theta \cos \theta,$$

$$S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin(\pi - \theta) = 2 \sin \theta.$$

Suy ra

$$S_2 - S_1 = 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Đặt

$$f(\theta) = 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Khi đó

$$f'(\theta) = 2\cos\theta + \cos 2\theta - 1 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 - 1 = 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2.$$

Giải $f'(\theta) = 0$:

$$2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0.$$

Ta được

$$\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{hoặc} \quad \cos\theta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}.$$

Kí hiệu

$$\cos\theta_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Vì vậy $\theta = \theta_0$, tức $\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, thì $f(\theta)$ lớn nhất, hay $S_2 - S_1 \approx 1,15$ đạt giá trị lớn nhất.

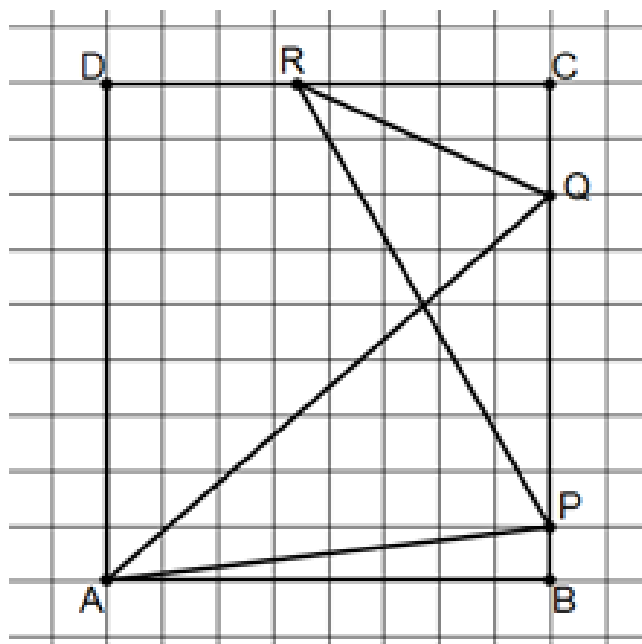
□

Bài toán 17. Như hình vẽ, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 7$, $AD = 9$. Gọi P, Q là hai điểm trên đoạn thẳng BC và R là một điểm trên đoạn thẳng CD sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $BP = 1$, $PQ = 6$

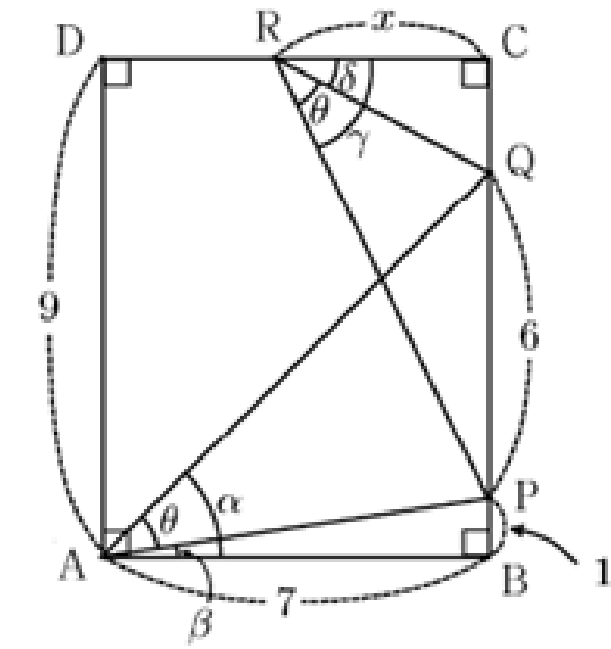
(ii) $\widehat{PAQ} = \widehat{PRQ}$.

Khi đó, giá trị của PR^2 là bao nhiêu?



Hình 16: Minh họa Bài toán 18

Lời giải. Đặt $\widehat{PAQ} = \widehat{PRQ} = \theta$, $\widehat{QAB} = \alpha$, $\widehat{PAB} = \beta$.



Hình 17: Phân tích góc Bài toán 18

Khi đó từ hình ta có $\tan \alpha = 1$ (do $BQ = BP + PQ = 1 + 6 = 7 = AB \Rightarrow \triangle ABQ$ vuông cân).
Và $\tan \beta = \frac{1}{7}$. Do đó:

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 - \frac{1}{7}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{6}{7}}{\frac{8}{7}} = \frac{3}{4}.$$

Ta có

$$CQ = AD - (BP + PQ) = 9 - (1 + 6) = 2.$$

Gọi $RC = x$, đặt $\widehat{PRC} = \gamma$, $\widehat{QRC} = \delta$. Khi đó

$$\tan \gamma = \frac{PC}{RC} = \frac{8}{x}$$

(vì $PC = PQ + QC = 6 + 2 = 8$) và

$$\tan \delta = \frac{QC}{RC} = \frac{2}{x}.$$

Nên:

$$\tan \theta = \tan(\gamma - \delta) = \frac{\tan \gamma - \tan \delta}{1 + \tan \gamma \tan \delta} = \frac{\frac{8}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{8}{x} \cdot \frac{2}{x}} = \frac{\frac{6}{x}}{1 + \frac{16}{x^2}} = \frac{6x}{x^2 + 16}.$$

Từ đó ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{6x}{x^2 + 16} &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow 24x = 3(x^2 + 16) \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 48 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Vậy $RC = 4$.

Xét tam giác vuông $\triangle PCR$:

$$PR^2 = RC^2 + CP^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80.$$

□

1.2 Phương pháp suy luận logic và quy nạp toán học

Nếu ở phần trước, tư duy hàm số và hình học giải tích giúp chúng ta mô hình hóa các chuyển động liên tục, thì ở phần này, chúng ta sẽ bước sang một khía cạnh thú vị khác của toán học thực tế: **Tư duy rời rạc và Logic quy nạp**.

Các bài toán thực tế không phải lúc nào cũng tuân theo các quy luật biến thiên trơn tru mà thường xuất hiện dưới dạng các chuỗi sự kiện lặp lại, các quy luật trò chơi hay bài toán chia tài sản theo chu kỳ. Mấu chốt để giải quyết lớp bài toán này nằm ở khả năng "giải mã" quy luật ẩn giấu, chuyển đổi các dữ kiện ngôn ngữ đời thường thành các mô hình dãy số (cấp số cộng, cấp số nhân) hoặc công thức truy hồi. Từ đó, học sinh không chỉ rèn luyện được tư duy logic chặt chẽ mà còn hình thành kỹ năng dự báo chính xác cho các kết quả cuối cùng trong một hệ thống phức tạp.

Bài toán 18. Một buổi chiều nọ, bên bếp lửa hồng trong gian nhà ẩm áp, người ta nhìn thấy ba mẹ con cùng ăn đậu phộng rang. Tấm ăn trước, cô bốc 1 hạt đậu và bỏ vào miệng; Cám là người bốc đậu tiếp theo, cô bỏ 2 hạt đậu vào miệng; dì ghẻ là người bốc đậu kế tiếp liền bỏ 3 hạt vào miệng. Trở lại lượt của Tấm, cô lấy 4 hạt đậu, rồi Cám lấy 5 hạt đậu, dì ghẻ lấy 6 hạt đậu... Bữa ăn hào hứng như thế cho đến lượt cuối cùng thì số hạt đậu không đủ theo quy luật trò chơi, người nào đến lượt cuối sẽ lấy hết số đậu còn lại. Sau bữa ăn ẩm áp ấy, Tấm nhận ra mình đã cho vào bụng 317 hạt đậu. Hỏi tổng số đậu mà ba mẹ con đã ăn trong tối đó là bao nhiêu?

Lời giải. Số đậu mà Tấm đã ăn là tổng của dãy số $1 + 4 + 7 + 10 + \dots$

Số đậu mà Tấm đã ăn từng lượt theo quy luật cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 3$.

Sau n lượt tham gia (của riêng Tấm), tổng số đậu mà Tấm đã ăn là:

$$S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n[2 + (n-1) \cdot 3]}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Xét phương trình $S_n = 317$:

$$\frac{n(3n-1)}{2} = 317 \Rightarrow 3n^2 - n - 634 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này, ta thấy không có nghiệm nguyên dương (vì $\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-634) = 7609$, $\sqrt{7609} \approx 87,2$). Điều này chứng tỏ ở lượt cuối cùng của mình, Tấm đã không ăn đủ số lượng theo quy luật mà chỉ ăn phần còn lại.

Ta thử với giá trị n gần nhất.

Nếu $n = 14$, số đậu Tấm ăn trọn vẹn trong 14 lượt đầu là:

$$S_{14} = \frac{14(3 \cdot 14 - 1)}{2} = 7 \cdot 41 = 287 \text{ (hạt)}.$$

Số đậu Tấm ăn ở lượt thứ 15 (lượt cuối cùng vét đĩa) là:

$$317 - 287 = 30 \text{ (hạt)}.$$

Theo quy luật, ở lượt thứ 15 của Tấm, lẽ ra cô ấy phải bốc:

$$u_{15} = u_1 + 14d = 1 + 14 \cdot 3 = 43 \text{ (hạt)}.$$

Vì $30 < 43$ nên đúng là Tấm đã ăn lượt cuối cùng và lấy hết số đậu còn lại.

Tính tổng số đậu

Chu kỳ ăn là 3 người (Tấm – Cám – Dì ghẻ). Trước khi đến lượt thứ 15 của Tấm (lượt vét đĩa), thì Tấm, Cám và Dì ghẻ đều đã ăn đủ 14 lượt trọn vẹn.

Tổng số lượt bốc đậu trọn vẹn của cả 3 người là:

$$14 \times 3 = 42 \text{ (lượt)}.$$

Số hạt đậu được ăn trong 42 lượt đầu tiên là tổng của dãy số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 42:

$$S_{42_lượt} = 1 + 2 + 3 + \dots + 42 = \frac{42(42+1)}{2} = 21 \cdot 43 = 903 \text{ (hạt)}.$$

Tổng số đậu ba mẹ con đã ăn bằng số đậu trong 42 lượt đầu cộng với số đậu Tấm ăn ở lượt cuối cùng:

$$\text{Tổng cộng} = 903 + 30 = 933 \text{ (hạt)}.$$

□

Bài toán 19. Có hai vợ chồng đã nghĩ ra một trò chơi đầy trí tuệ như sau: Họ sử dụng hai ly nước giống hệt nhau, mỗi ly chứa tối đa 240 ml nước. Ban đầu, người vợ có một ly nước đầy và người chồng có một cái ly rỗng. Bước thứ nhất người vợ rót $\frac{1}{2}$ lượng nước trong ly của mình sang ly của người chồng; bước tiếp theo người chồng lại rót $\frac{1}{3}$ lượng nước trong ly của mình sang cho ly người vợ. Quá trình này cứ tiếp tục mà mỗi lần rót thì mẫu số được cộng thêm 1; trò chơi này hấp dẫn đến mức cả hai người thực hiện đến bước thứ 100 thì dừng lại, hỏi lượng nước trong ly người chồng khi đó là bao nhiêu ml? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, giả sử trong quá trình rót nước không có giọt nước nào tràn ra ngoài).

Ban đầu	Ly người vợ: $V \text{ ml}$	Ly người chồng: 0 ml
Bước thứ nhất: Vợ rót $\frac{1}{2}$ nước trong ly cho chồng	$\frac{1}{2}V$	$\frac{1}{2}V$
Bước thứ hai: Chồng rót $\frac{1}{3}$ nước trong ly cho vợ	$\frac{1}{2}V + \frac{1}{6}V = \frac{2}{3}V$	$\frac{1}{3}V$
Bước thứ ba: Vợ rót $\frac{1}{4}$ nước trong ly cho chồng	$\frac{2}{3}V - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{2}V$	$\frac{1}{2}V$
Bước thứ tư: Chồng rót $\frac{1}{5}$ nước trong ly cho vợ	$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{3}{5}V$	$\frac{2}{5}V$
Bước thứ năm: Vợ rót $\frac{1}{6}$ nước trong ly cho chồng	$\frac{3}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}V = \frac{1}{2}V$	$\frac{1}{2}V$

Hình 18: Minh họa Bài toán 20

Lời giải. Quá trình này được lặp đi lặp lại và ta thấy rằng trong các bước lẻ (người vợ rót nước cho người chồng) thì lượng nước hai ly bằng nhau.

- Bước thứ 99 thì lượng nước hai ly bằng nhau. - Bước thứ 100 (người chồng rót $\frac{1}{101}$ nước trong ly cho vợ), lượng nước trong ly người chồng là:

$$\frac{1}{2}V - \frac{1}{101} \cdot \frac{1}{2}V = \frac{50}{101}V = \frac{50}{101} \cdot 240 \approx 119 \text{ ml}.$$

□

Bài toán 20. Sở chỉ huy phòng chống lũ của một thành phố nhận được bản tin mưa mới nhất: trong 24 giờ tới, mực nước lũ bên ngoài đập chắn lũ ở khu vực nội thành sẽ vượt quá mực nước báo động. Vì vậy cần khẩn cấp điều động máy móc thi công để gia cố, nâng cao đập chắn lũ.

Tính toán cho thấy, để hoàn thành công trình gia cố nâng cao đập chắn lũ cần điều 20 xe ben một loại nhất định, trung bình mỗi xe ben phải làm việc 24 giờ. Hiện tại sở chỉ huy phòng chống lũ chỉ có 1 xe ben có thể lập tức đưa vào thi công, các xe ben còn lại phải điều từ các công trình khác về. Giả sử các xe ben được điều đến công trường cách nhau 20 phút, mỗi lần có đúng 1 xe tới hiện trường để tham gia làm việc. Để trong vòng 24 giờ hoàn thành công trình gia cố nâng cao đập chắn lũ, sở chỉ huy ít nhất còn phải điều thêm bao nhiêu xe ben loại này?

Lời giải. Theo đề bài, một xe ben cần làm việc $20 \cdot 24 = 480$ (giờ) mới có thể hoàn thành phần việc gia cố, nâng cao đập chắn lũ.

Giả sử cần ít nhất n xe ben loại này thì mới có thể hoàn thành công trình trong 24 giờ. Khi đó thời gian làm việc (đơn vị: giờ) của n xe ben này, nếu xếp theo thứ tự giảm dần, lần lượt là $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Do cứ sau 20 phút (tức $\frac{1}{3}$ giờ) mới có thêm 1 xe đến công trường, nên dãy (a_n) là một cấp số cộng có công sai $-\frac{1}{3}$. Suy ra $a_1 = 24$.

Gọi S_n là tổng n số hạng đầu của cấp số cộng (a_n) . Khi đó

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 24n - \frac{1}{6}n(n-1).$$

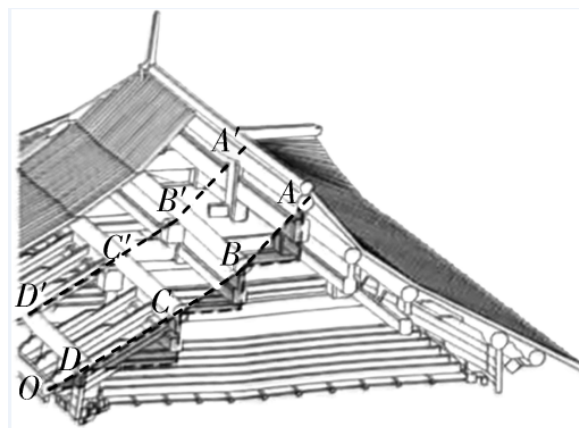
Khi $n = 23$, ta có $S_{23} \approx 467,7 < 480$. Khi $n = 24$, ta có $S_{24} = 484 > 480$.

Vì vậy $n = 24$, tức cần ít nhất 24 xe ben. Đã có sẵn 1 xe, nên còn phải điều thêm

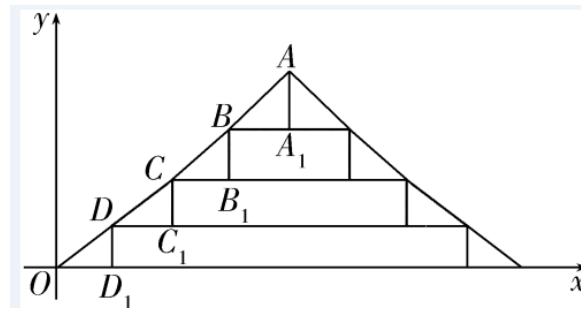
$$24 - 1 = 23 \text{ xe ben.}$$

□

Bài toán 21. Hình 1 là kết cấu xà trong kiến trúc cổ của một ngôi chùa ở Huế.



Hình 19: Hình 1: Kết cấu xà



Hình 20: Hình 2: Mặt cắt mái

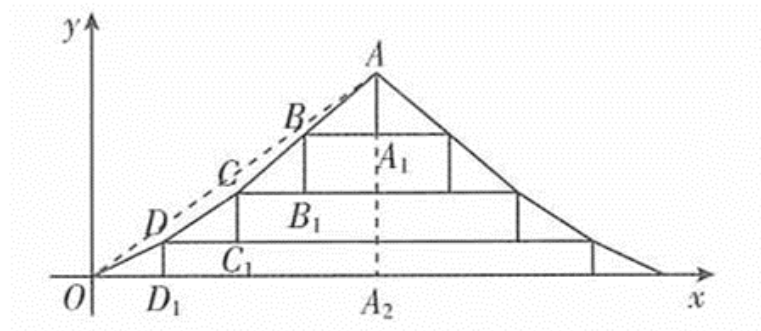
Các đoạn AA', BB', CC', DD' là các thanh xà; khoảng cách nằm ngang giữa hai thanh xà kề nhau gọi là "bước", khoảng cách thẳng đứng gọi là "độ nâng".

Hình 2 là hình cắt mái của một ngôi nhà cổ, trong đó các đoạn DD_1, CC_1, BB_1, AA_1 là độ nâng; các đoạn $OD_1, D_1C_1, C_1B_1, B_1A_1$ là những bước bằng nhau.

Tỉ số giữa độ nâng và bước của các thanh xà kề nhau lần lượt là

$$\frac{DD_1}{OD_1} = 0,5, \frac{CC_1}{D_1C_1} = k_1, \frac{BB_1}{C_1B_1} = k_2, \frac{AA_1}{B_1A_1} = k_3.$$

Biết rằng k_1, k_2, k_3 lập thành một cấp số cộng có công sai 0,1, và hệ số góc của đường thẳng OA bằng 0,725. Hãy tính k_3 .



Hình 21: Minh họa Bài toán 22 (Hình 3)

Lời giải. Nối OA và kéo dài A_1A cắt trục Ox tại A_2 . Khi đó

$$OA_2 = 4OD_1$$

(vì có bốn bước bằng nhau).

Vì k_1, k_2, k_3 là cấp số cộng công sai 0,1 nên

$$k_2 = k_3 - 0,1, \quad k_1 = k_3 - 0,2.$$

Do

$$\frac{CC_1}{D_1C_1} = k_1$$

nên

$$CC_1 = k_1 \cdot D_1C_1 = k_1 \cdot OD_1 = (k_3 - 0,2)OD_1.$$

Tương tự,

$$BB_1 = k_2 \cdot C_1B_1 = (k_3 - 0,1)OD_1, \quad AA_1 = k_3 \cdot B_1A_1 = k_3OD_1.$$

Lại có

$$\frac{DD_1}{OD_1} = 0,5 \Rightarrow DD_1 = 0,5OD_1.$$

Suy ra

$$AA_2 = DD_1 + CC_1 + BB_1 + AA_1 = 0,5OD_1 + (k_3 - 0,2)OD_1 + (k_3 - 0,1)OD_1 + k_3OD_1.$$

Do đó

$$AA_2 = (3k_3 + 0,2)OD_1.$$

Suy ra

$$\tan \widehat{AOA_2} = \frac{AA_2}{OA_2} = \frac{(3k_3 + 0,2)OD_1}{4OD_1} = \frac{3k_3 + 0,2}{4} = 0,725.$$

Giải phương trình:

$$\frac{3k_3 + 0,2}{4} = 0,725 \Rightarrow 3k_3 + 0,2 = 2,9 \Rightarrow 3k_3 = 2,7 \Rightarrow k_3 = 0,9.$$

□

Bài toán 22. (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa 2025) Hai bạn cùng chơi trò chơi như sau, bạn thứ nhất bỏ vào hộp 2 viên bi thì bạn thứ hai sẽ bỏ vào số bi gấp đôi số bi của người kia đồng thời lấy ra khỏi hộp 1 viên, cuộc chơi dừng lại nếu số bi trong hộp lớn hơn 2000 viên. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu lần chơi thì dừng cuộc chơi?

Lời giải. Theo quy tắc chơi đã cho ta thấy cuộc chơi theo dãy số

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Biến đổi

$$u_{n+1} - 1 = 2(u_n - 1), \quad \forall n \geq 1.$$

và đặt

$$v_n = u_n - 1, \quad \forall n \geq 1.$$

ta có

$$v_{n+1} = 2v_n$$

là cấp số nhân có công bội $q = 2$, $v_1 = 1$.

Tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân là

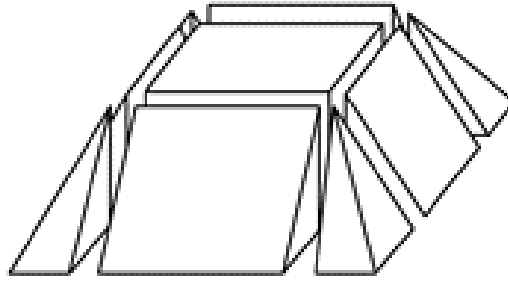
$$S_n = \frac{1(1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1,$$

do đó tổng số bi trong hộp là:

$$T_n = S_n + n = 2^n + n - 1 > 2000 \Rightarrow n \geq 11.$$

□

Bài toán 23. Như hình vẽ, một hình chóp cụt tứ giác đều được chia thành 9 phần, trong đó có 1 phần là hình hộp chữ nhật, 4 phần là lăng trụ tam giác đứng, 4 phần là hình chóp tứ giác. Biết thể tích mỗi lăng trụ tam giác đứng là 3, thể tích mỗi hình chóp tứ giác là 1. Khi đó thể tích của hình chóp cụt tứ giác đều bằng



Hình 22: Minh họa Bài toán 22 (Hình 3)

Lời giải. Gọi chiều cao của mỗi lăng trụ tam giác đứng là a . Mỗi hình chóp tứ giác có đáy là hình vuông cạnh b . Gọi chiều cao của hình chóp cắt tứ giác đều là h .

Vì thể tích mỗi lăng trụ tam giác đứng bằng 3 và mỗi hình chóp tứ giác bằng 1 nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ab \cdot h = 3 \\ \frac{1}{3}b^2 \cdot h = 1 \end{cases}$$

Từ

$$\frac{1}{2}abh = 3 \Rightarrow abh = 6 \Rightarrow a^2b^2h^2 = 36.$$

Từ

$$\frac{1}{3}b^2h = 1 \Rightarrow b^2h = 3.$$

Suy ra

$$a^2h \cdot (b^2h) = 36 \Rightarrow a^2h \cdot 3 = 36 \Rightarrow a^2h = 12.$$

Do đó thể tích hình chóp cắt tứ giác đều là

$$V = a^2h + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 12 + 12 + 4 = 28.$$

□

1.3 Các bài toán có nội dung liên môn

Trong kỷ nguyên số, Toán học không chỉ là công cụ tính toán thuần túy mà còn là ngôn ngữ vạn năng để mô tả các quy luật vận động của thế giới thực. Chuyên đề này sẽ đưa chúng ta khám phá vẻ đẹp ứng dụng của vi tích phân thông qua các mô hình vật lý kinh điển như sự tỏa nhiệt hay động lực học chất lỏng. Thách thức lớn nhất không nằm ở kỹ thuật tính toán, mà ở **tư duy mô hình hóa (Mathematical Modeling)**: chuyển dịch các hiện tượng tự nhiên thành các phương trình vi phân, thiết lập mối liên kết biện chứng giữa các đại lượng biến thiên. Đây chính là bước đệm quan trọng để rèn luyện tư duy giải quyết vấn đề (Problem Solving) trong bối cảnh thực tiễn.

Bài toán 24. Trong giờ sinh hoạt STEM, các bạn học sinh thực hiện một thí nghiệm về sự tỏa nhiệt. Một ly trà nóng vừa được pha xong với nhiệt độ ban đầu là 95°C và đặt lên bàn trong phòng thí nghiệm có nhiệt độ không đổi là 25°C . Các bạn bắt đầu bấm đồng hồ đo đặc lúc 10 giờ đúng. Lúc này nhiệt độ của ly trà đo được là 65°C . Đúng 1 giờ sau, nhiệt độ của ly trà đo được giảm xuống còn 45°C . Biết rằng tốc độ thay đổi nhiệt độ của vật thể tỉ lệ thuận với sự chênh lệch nhiệt độ giữa vật thể và môi trường. Hỏi cốc trà được pha trước lúc các bạn học sinh bắt đầu bấm giờ bao nhiêu phút (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải. *Phân tích định hướng:* Để giải quyết bài toán này, ta cần thiết lập một hàm số $T(t)$ mô tả nhiệt độ theo thời gian. Từ giả thiết “tốc độ thay đổi nhiệt độ tỉ lệ thuận với sự chênh lệch nhiệt độ”, ta liên hệ đến đạo hàm $T'(t)$ và thiết lập một phương trình vi phân. Mục tiêu là tìm quy luật giảm nhiệt để suy ra thời điểm trong quá khứ khi nhiệt độ là 95°C .

- a) Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của ly trà tại thời điểm t (giờ), nhiệt độ môi trường là 25°C . Theo giả thiết, ta có

$$\frac{T'(t)}{T(t) - 25} = k \Rightarrow (\ln|T(t) - 25|)' = k.$$

Suy ra

$$\ln(T(t) - 25) = kt + C \Rightarrow T(t) = 25 + e^{kt+C} = 25 + Me^{kt},$$

trong đó $M = e^C$.

- b) Chọn mốc thời gian $t = 0$ là lúc 10 giờ. Khi đó $T(0) = 65$, nên

$$65 = 25 + M \Rightarrow M = 40.$$

Do đó

$$T(t) = 25 + 40e^{kt}.$$

- c) Tại thời điểm $t = 1$ (lúc 11 giờ), nhiệt độ là 45°C . Khi đó

$$45 = 25 + 40e^k \Rightarrow e^k = 0,5 \Rightarrow k = \ln(0,5) = -\ln 2.$$

Suy ra

$$T(t) = 25 + 40e^{-t\ln 2} = 25 + 40\left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

- d) Gọi t_0 là thời điểm pha trà, khi đó $T(t_0) = 95^\circ\text{C}$. Ta có

$$95 = 25 + 40\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{t_0} = \frac{7}{4}.$$

Suy ra

$$t_0 = \log_{0,5}\left(\frac{7}{4}\right) \approx -0,8 \text{ (giờ)}.$$

- e) Đổi ra phút:

$$0,8 \times 60 = 48 \text{ phút}.$$

Vậy ly trà được pha trước lúc 10 giờ khoảng 48 phút.

□

Bài toán 25. Một bể nước hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh 2 m, chiều cao 1 m. Ban đầu bể đầy nước. Người ta mở một cái vòi ở đáy, nước chảy ra với tốc độ tỷ lệ thuận với căn bậc hai của độ cao của nước tại bất kì thời điểm nào. Giả sử độ cao của nước trong bể tại thời điểm t là $h(t)$ và $V(t)$ là thể tích của nước hiện tại sau t phút mở vòi thì ta có

$$V'(t) = k \cdot \sqrt{h(t)}, \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Biết rằng, mực nước giảm 19 cm sau 2 phút, hỏi sau bao nhiêu phút thì bể cạn nước.

Phân tích định hướng: Bài toán yêu cầu tìm thời gian để bể cạn (tức $h(t) = 0$). Chúng ta có công thức về tốc độ thay đổi thể tích $V'(t)$, nhưng đại lượng cần tìm lại liên quan đến chiều cao $h(t)$. Do bể có hình dạng cố định (hình hộp), thể tích và chiều cao có mối quan hệ tuyến tính $V = S_{\text{mặt đáy}} \cdot h$. Do đó, ta sẽ chuyển phương trình vi phân của V về phương trình vi phân của h , từ đó tìm hàm số $h(t)$ cụ thể.

Lời giải. Vì bể nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao $h(t)$ và có đáy luôn là hình vuông cạnh 2m nên thể tích của hình hộp tại thời điểm t là

$$V(t) = 2^2 \cdot h(t) = 4h(t).$$

Suy ra $V'(t) = 4h'(t)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} V'(t) &= k \cdot \sqrt{h(t)} \Leftrightarrow 4h'(t) = k \cdot \sqrt{h(t)} \Leftrightarrow \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = \frac{k}{4} \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{h(t)})' = \frac{k}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{h(t)})' = \frac{k}{8}. \end{aligned}$$

Nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\sqrt{h(t)} = \int \frac{k}{8} dt = \frac{k}{8}t + C.$$

Ban đầu bể đầy nước, chiều cao bằng 1m,

$$\sqrt{h(t)} = \frac{k}{8}t + 1$$

(ứng với giả thiết mực nước ban đầu là 1m).

Mực nước giảm 19cm (0,19m) sau 2 phút, tức là tại $t = 2$, $h(2) = 1 - 0,19 = 0,81$. Thay vào phương trình:

$$\sqrt{0,81} = \frac{k}{8} \cdot 2 + 1 \Rightarrow 0,9 = \frac{k}{4} + 1 \Rightarrow \frac{k}{4} = -0,1 \Rightarrow \frac{k}{8} = -0,05$$

Vậy phương trình là:

$$\sqrt{h(t)} = -0,05t + 1.$$

Bể cạn nước khi $h(t) = 0$:

$$-0,05t + 1 = 0 \Rightarrow 0,05t = 1 \Rightarrow t = 20 \text{ (phút)}.$$

□

Bài toán 26. Vì nước và dầu không hoà tan vào nhau nên nếu dầu đổ vào nước sẽ tạo thành một mảng hình trụ trên bề mặt nước. Bán kính $r(t)$ của mảng này lan ra với tốc độ tỉ lệ thuận với chiều cao $h(t)$ của mảng dầu. Giả sử một lít dầu bị đổ trên mặt hồ tĩnh lặng. Bán kính ban đầu của vết tràn là 20 cm và sau 2 giây nó tăng lên 50 cm. Hỏi sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần mười) thì bán kính vết tràn đạt 5 mét?

Lời giải. Vì mảng dầu này lan có dạng hình trụ, nên ta có thể tích khối dầu

$$V = \pi \cdot r^2(t) \cdot h(t)$$

(thể tích này là không đổi),

$$\Rightarrow h(t) = \frac{V}{\pi r^2(t)}.$$

Bán kính $r(t)$ của mảng dầu lan ra với tốc độ $r'(t)$, mà tốc độ lan ra $r'(t)$ tỉ lệ thuận với chiều cao $h(t)$ của mảng dầu nên theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có

$$r'(t) = k \cdot h(t) \quad (*)$$

Thay $h(t) = \frac{V}{\pi r^2(t)}$ vào biểu thức (*) ta được:

$$r'(t) = k \frac{V}{\pi r^2(t)}.$$

Vì $k \frac{V}{\pi}$ là một đại lượng không đổi nên đặt $a = k \frac{V}{\pi}$. Khi đó

$$r'(t) = \frac{a}{r^2(t)} \Leftrightarrow r^2(t) \cdot r'(t) = a \Leftrightarrow 3r^2(t) \cdot r'(t) = 3a \Leftrightarrow (r^3(t))' = 3a.$$

Nguyên hàm hai vế, ta được

$$r^3(t) = \int 3a dt \Leftrightarrow r^3(t) = 3at + C.$$

Từ giả thiết: bán kính ban đầu của vết tràn là 20 cm và sau 2 s nó tăng lên 50 cm, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} r(0) = 20, \\ r(2) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 20^3 = 8000, \\ 3a \cdot 2 + C = 50^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 8000, \\ a = 19500. \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^3(t) = 58500t + 8000 \text{ (cm)}.$$

Đổi 5 m = 500 cm.

Bán kính vết tràn đạt 4 m tương đương với * (Lưu ý: Đề bài hỏi 5 mét, nhưng trong lời giải gốc dòng này ghi 4 mét, sau đó dòng thay số lại thay 500 (tức là 5 m). Tôi giữ nguyên con số 500 trong biểu thức tính toán để khớp với đáp số 35,6.)*

$$r^3(t) = 500^3 \Rightarrow 500^3 = 58500t + 8000.$$

$$\Rightarrow t = \frac{500^3 - 8000}{58500} \approx 2136,61 \text{ s} \approx 35,6 \text{ phút}.$$

□

Bài toán 27. Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm $A(\text{mg})$ chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm $T(\text{s})$ khi chất chỉ thị màu tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm $t(\text{s})$ thì hiệu suất của tim được xác định bởi

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt} \text{ (l/s)}.$$

Biết

$$c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t), \text{ với } 0 \leq t \leq 12.$$

Tính hiệu suất của tim khi bơm 8 mg chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị l/s).

Lời giải. Từ đề bài ta có:

- $A = 8$ mg (lượng chất chỉ thị màu được bơm vào),
- $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t)$, $0 \leq t \leq 12$,
- T là thời điểm chất chỉ thị màu tan sạch, tức là $c(T) = 0$.
- Từ

$$c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t) = 0,$$

ta có $t = 0$ hoặc $t = 12$. Vì T là thời điểm chất chỉ thị màu tan sạch (sau khi bơm), nên $T = 12$ (giây).

Vậy ta cần tính

$$\begin{aligned} \int_0^{12} \frac{1}{4}t(12 - t)dt. \\ \int_0^{12} \frac{1}{4}(12t - t^2)dt &= \frac{1}{4} \int_0^{12} (12t - t^2)dt \\ &= \frac{1}{4} \left[6t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^{12} \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(6 \cdot 12^2 - \frac{12^3}{3} \right) - \left(6 \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4}(864 - 576) = \frac{1}{4} \cdot 288 = 72. \end{aligned}$$

Tính hiệu suất của tim F :

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \text{ (l/s)} \approx 0,11 \text{ (l/s)}.$$

Kết quả: Hiệu suất của tim xấp xỉ 0,11l/s.

□

Bài toán 28. Ở 45°C , phản ứng hoá học phân huỷ $2\text{N}_2\text{O}_5$ xảy ra theo phương trình



với nồng độ $c(t)$ (mol/L) của $2\text{N}_2\text{O}_5$ ($c(t) > 0$) tại thời điểm t giây ($t \geq 0$) thoả mãn

$$c'(t) = -0,0005 \cdot c(t).$$

Biết khi $t = 0$, nồng độ ban đầu của $2\text{N}_2\text{O}_5$ là 0,05 mol/L và nồng độ trung bình của $2\text{N}_2\text{O}_5$ (mol/L) từ thời điểm a giây đến thời điểm b giây ($a < b$) được cho bởi công thức

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b c(t)dt.$$

Nồng độ trung bình của $2\text{N}_2\text{O}_5$ từ thời điểm 10 giây đến thời điểm 20 giây là $a \cdot 10^{-4}$ (mol/L). Tính a (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải. Để tính được nồng độ trung bình, ta cần đi tìm $c(t)$.

Theo giả thiết, ta có $c'(t) = -0,0005 \cdot c(t)$

$$\Rightarrow \frac{c'(t)}{c(t)} = -0,0005 \Leftrightarrow (\ln |c(t)|)' = -0,0005.$$

Nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln |c(t)| = -0,0005t + C \Rightarrow c(t) = e^{-0,0005t+C}.$$

Biết tại $t = 0$ thì $c(0) = 0,05 \text{ mol/L} \Leftrightarrow e^C = 0,05 \Rightarrow C = \ln 0,05$. Suy ra

$$c(t) = e^{-0,0005t + \ln 0,05}.$$

Nồng độ trung bình từ thời điểm 10 giây đến thời điểm 20 giây là

$$\frac{1}{20-10} \int_{10}^{20} c(t) dt = \frac{1}{10} \int_{10}^{20} e^{-0,0005t + \ln 0,05} dt \approx 0,0496 \approx 496 \cdot 10^{-4}.$$

Vậy $a = 496$.

□

Bài toán 29. Trong lĩnh vực kỹ thuật thông tin liên lạc, công thức Shannon

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

được thừa nhận rộng rãi như cơ sở lý thuyết. Nó cho biết: trong một kênh truyền chịu nhiễu Gauss trắng, tốc độ truyền tin tối đa C phụ thuộc vào băng thông kênh W , công suất trung bình S của tất cả các tín hiệu trong kênh và công suất nhiễu Gauss N bên trong kênh; trong đó $\frac{S}{N}$ gọi là tỉ số tín hiệu trên nhiễu (SNR, “tín-nhiều”).

Cho số liệu tham khảo: $\lg 5 \approx 0,6990$.

- Nếu không thay đổi tỉ số tín-nhiều $\frac{S}{N}$, mà tăng băng thông kênh W lên gấp đôi, thì C tăng gấp đôi.
- Nếu không thay đổi băng thông kênh W và công suất trung bình S của tất cả các tín hiệu, mà giảm công suất nhiễu Gauss N trong kênh xuống bằng một nửa, thì C tăng gấp đôi.
- Nếu không thay đổi băng thông kênh W , mà nâng tỉ số tín-nhiều $\frac{S}{N}$ từ 255 lên 1023, thì C tăng 25%.
- Nếu không thay đổi băng thông kênh W , mà nâng tỉ số tín-nhiều $\frac{S}{N}$ từ 999 lên 4999, thì C tăng khoảng 23,3%.

Lời giải. Theo công thức Shannon: $C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$.

- Đúng.** Khi $\frac{S}{N}$ không đổi, mà W tăng gấp đôi, ta có

$$C' = 2W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 2C.$$

b) **Sai.** Khi W và S không đổi, còn N giảm một nửa, ta có

$$C' = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N/2} \right) = W \log_2 \left(1 + \frac{2S}{N} \right).$$

Trong khi đó

$$2C = 2W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right).$$

Vì

$$\log_2 \left(1 + \frac{2S}{N} \right) \neq 2 \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right),$$

nên C không tăng gấp đôi, suy ra mệnh đề sai.

c) **Đúng.** Nếu $\frac{S}{N}$ tăng từ 255 lên 1023, thì

$$\begin{cases} C_1 = W \log_2(1 + 255) = W \log_2 256 = 8W, \\ C_2 = W \log_2(1 + 1023) = W \log_2 1024 = 10W. \end{cases}$$

Tỉ số

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{10W}{8W} = 1,25,$$

nên C tăng 25%.

d) **Đúng.** Nếu $\frac{S}{N}$ tăng từ 999 lên 4999, thì

$$\begin{cases} C_1 = W \log_2(1 + 999) = W \log_2 1000, \\ C_2 = W \log_2(1 + 4999) = W \log_2 5000. \end{cases}$$

Do đó

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\log_2 5000}{\log_2 1000} = \frac{\lg 5000}{\lg 1000} = \frac{\lg(5 \cdot 10^3)}{3} = \frac{\lg 5 + 3}{3} \approx \frac{0,6990 + 3}{3} \approx 1,233.$$

Vì vậy C tăng xấp xỉ $1,233 - 1 = 0,233$, tức khoảng 23,3%.

□

Bài toán 30. Một nạn nhân tai nạn được tiêm tĩnh mạch một loại thuốc để trấn tĩnh. Nồng độ f của thuốc trong máu ngay sau khi tiêm là $f(0) = 1 \text{ mg/ml}$.

Tốc độ thay đổi f' của nồng độ thuốc trong máu được mô hình hóa bằng hàm:

$$f'(t) = 0,025e^{-0,05t} - 0,01$$

(t tính bằng phút; $f'(t)$ tính bằng mg/ml mỗi phút).

a) Hàm số $f(t) = -0,5e^{-0,05t} - 0,01t + 1$.

b) Sau 30 phút, nồng độ bằng 1,09mg/ml nhưng đang giảm.

c) Nồng độ thuốc đạt cực đại bằng 1,12mg/ml sau khoảng 18,3 phút.

d) Có thể xuất hiện tác dụng phụ như chóng mặt nếu nồng độ tăng với tốc độ ít nhất 0,010mg/ml mỗi phút; điều này xảy ra trong khoảng $4 \rightarrow 5$ phút đầu sau khi tiêm.

Lời giải.

a) Theo giả thiết, ta có

$c'(t) = -0,0005 c(t).$

Suy ra

$\frac{c'(t)}{c(t)} = -0,0005 \Leftrightarrow (\ln |c(t)|)' = -0,0005.$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$\ln |c(t)| = -0,0005t + C \Rightarrow c(t) = e^{-0,0005t+C}.$

b) Biết rằng tại $t = 0$ thì

$c(0) = 0,05 \text{ (mol/L)} \Leftrightarrow e^C = 0,05 \Rightarrow C = \ln 0,05.$

Do đó

$c(t) = e^{-0,0005t+\ln 0,05}.$

c) Nồng độ trung bình của chất trong khoảng thời gian từ 10 giây đến 20 giây là

$\frac{1}{20-10} \int_{10}^{20} c(t) dt = \frac{1}{10} \int_{10}^{20} e^{-0,0005t+\ln 0,05} dt \approx 0,0496 = 496 \cdot 10^{-4}.$

Suy ra $a = 496.$

□

2 Đánh giá về sáng kiến được tạo ra

2.1 Tính mới của sáng kiến

Mô tả điểm mới cơ bản và tính ưu việt: Sáng kiến “Phương pháp tiếp cận bài toán thực tế trong đề thi thử môn toán THPT QG 2026” không chỉ dừng lại ở việc giải các bài toán riêng lẻ, mà tập trung vào việc **chuẩn hóa quy trình tư duy mô hình hóa (Mathematical Modeling)**. Tính mới được thể hiện qua sự so sánh sau:

Phương pháp truyền thống/Sẵn có	Giải pháp của sáng kiến (Điểm mới)
Tiếp cận theo dạng bài (Chuyển động, Lãi suất, Hình không gian...) một cách rời rạc.	Tiếp cận theo công cụ tư duy : Phân loại dựa trên kỹ thuật đặt biến (biến thiên thời gian t , biến thiên góc α) và phương pháp suy luận (quy nạp, logic rời rạc).
Học sinh thường lúng túng khi gặp các bài toán có ngữ cảnh lạ hoặc liên môn (Vật lý, Sinh học).	Xây dựng quy trình 3 bước: <i>Đọc hiểu từ khóa</i> → <i>Thiết lập hàm số / Phương trình vi phân</i> → <i>Tối ưu hóa</i> , giúp học sinh tự tin xử lý các bài toán liên môn (như bài toán nồng độ thuốc, định luật Shanon, độ lan truyền vết dầu...).
Chủ yếu dựa vào công thức tính nhanh (mẹo), ít rèn luyện bản chất.	Đi sâu vào bản chất đạo hàm, tích phân và dãy số để giải quyết gốc rễ vấn đề, đáp ứng yêu cầu đánh giá năng lực của kỳ thi 2026.

Bảng 1: Bảng so sánh tính mới của sáng kiến

Khả năng tính sáng tạo: Đây là hệ thống phương pháp luận do tác giả tự nghiên cứu và đúc kết qua quá trình giảng dạy thực tế tại trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, chưa được công bố trong các tài liệu giáo khoa chính thống hay các sách tham khảo hiện hành. Hệ thống bài tập (từ Bài toán 1 đến Bài toán 31) được chọn lọc và làm mới số liệu để phù hợp với bối cảnh thực tiễn hiện đại (AI, Y học, Kiến trúc cổ).

2.2 Hiệu quả áp dụng

Hiệu quả kinh tế: Mặc dù sáng kiến thuộc lĩnh vực giáo dục, không trực tiếp sinh ra lợi nhuận bằng tiền mặt, nhưng hiệu quả kinh tế được thể hiện qua việc **tiết kiệm thời gian và chi phí ôn tập**:

- Giúp học sinh giảm thiểu thời gian học thêm tràn lan các dạng bài không trọng tâm.
- Cung cấp nguồn tài liệu chất lượng cao, miễn phí cho thư viện nhà trường, tiết kiệm chi phí mua bản quyền tài liệu tham khảo.

Hiệu quả xã hội (Hiệu quả giáo dục): Sáng kiến đã góp phần nâng cao chất lượng dạy và học bộ môn Toán, cụ thể:

- **Tăng năng suất và hiệu quả công tác:** Giáo viên có bộ công cụ giảng dạy bài bản, giảm tải áp lực soạn giáo án các chuyên đề vận dụng cao.
- **Cải thiện tư duy học sinh:** Học sinh chuyển từ tâm lý “sợ” bài toán thực tế sang hứng thú khám phá. Kỹ năng đọc hiểu và mô hình hóa toán học được nâng lên rõ rệt.

2.3 Khả năng áp dụng của sáng kiến

- **Tình trạng áp dụng:** Sáng kiến đã được áp dụng thử nghiệm và chính thức trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi và ôn thi Tốt nghiệp THPT tại trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, tỉnh Đồng Nai trong năm học 2025 - 2026.
- **Lĩnh vực áp dụng:** Giáo dục và Đào tạo (Giảng dạy môn Toán bậc THPT, Giáo dục STEM).
- **Điều kiện cần thiết để áp dụng:**
 - *Đối với giáo viên:* Cần nắm vững kiến thức liên môn cơ bản (Vật lý, Hóa học, Sinh học) và kỹ năng sử dụng công cụ tính toán giải tích.
 - *Đối với học sinh:* Cần trang bị nền tảng kiến thức về hàm số, đạo hàm, nguyên hàm và dãy số ở mức độ nhận biết - thông hiểu trước khi tiếp cận chuyên đề này.
 - *Cơ sở vật chất:* Có thể áp dụng trong lớp học truyền thống hoặc hỗ trợ bởi máy chiếu để minh họa các hình ảnh thực tế (cầu, tháp, sơ đồ...).
- **Phạm vi áp dụng:** Sáng kiến có khả năng nhân rộng cao, có thể áp dụng cho:
 - Các trường THPT, THPT chuyên trong toàn tỉnh Đồng Nai.
 - Làm tài liệu tham khảo cho giáo viên Toán trên toàn quốc trong việc đổi mới phương pháp kiểm tra đánh giá theo định hướng phát triển năng lực.

3 Phần kết luận

3.1 Bài học kinh nghiệm

Từ quá trình nghiên cứu và áp dụng sáng kiến vào thực tiễn giảng dạy, chúng tôi rút ra một số bài học kinh nghiệm sau:

- **Tính thời sự:** Các bài toán thực tế cần liên tục được cập nhật số liệu và ngữ cảnh (như bão lũ, dịch bệnh, công nghệ AI...) để tạo sự gần gũi và hấp dẫn học sinh. Không nên sử dụng các bài toán với số liệu quá cũ kỹ, xa rời thực tế.
- **Vai trò của người thầy:** Giáo viên không chỉ là người truyền thụ kiến thức toán học mà phải đóng vai trò là người hướng dẫn (mentor), giúp học sinh kết nối Toán học với các môn khoa học khác và đời sống.
- **Cân bằng lý thuyết - thực hành:** Cần đảm bảo học sinh nắm chắc công cụ toán học (đạo hàm, tích phân) trước khi đi vào mô hình hóa. Tránh việc “thực tế hóa” gượng ép khi học sinh chưa đủ nền tảng.

3.2 Kiến nghị và đề xuất

Để sáng kiến được lan tỏa và phát huy hiệu quả cao hơn, tôi xin mạnh dạn đề xuất:

- **Đối với Sở Giáo dục và Đào tạo:** Cần tổ chức nhiều hơn các hội thảo chuyên đề về “Toán học và Thực tiễn”, tạo diễn đàn để giáo viên chia sẻ kho ngân hàng câu hỏi thực tế chất lượng. Tăng cường tỉ trọng các câu hỏi này trong các đề thi kiểm tra định kỳ của Tỉnh.
- **Đối với các trường THPT:** Khuyến khích hình thành các CLB STEM Toán học, nơi học sinh có thể trải nghiệm việc đo đạc thực tế (ví dụ: đo chiều cao cột cờ, tính lưu lượng nước...) sau đó về lớp để mô hình hóa và giải quyết bài toán.

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của bản thân, không sao chép nội dung của người khác. Tôi xin chịu hoàn toàn trách nhiệm về tính trung thực của báo cáo này.

Đồng Nai, ngày tháng năm 2026
Người viết báo cáo

NGUYỄN HOÀNG VINH