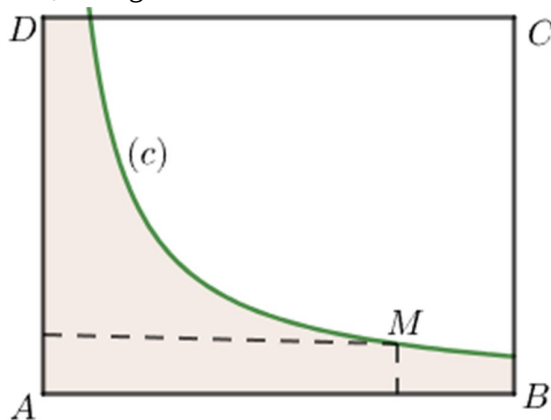


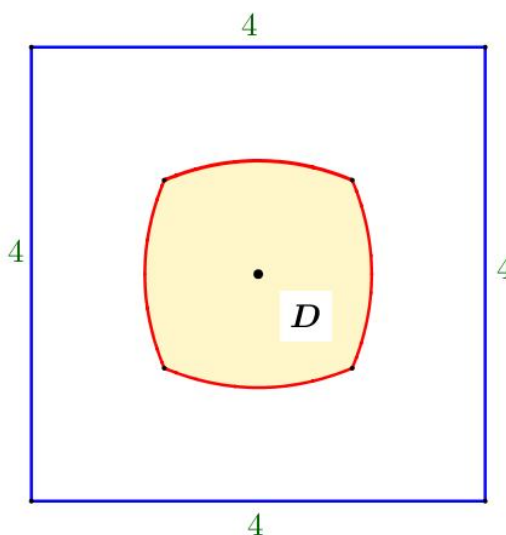
SKILL. TRUY HÀM TÍNH DIỆN TÍCH

BÀI TẬP TRÊN LỚP

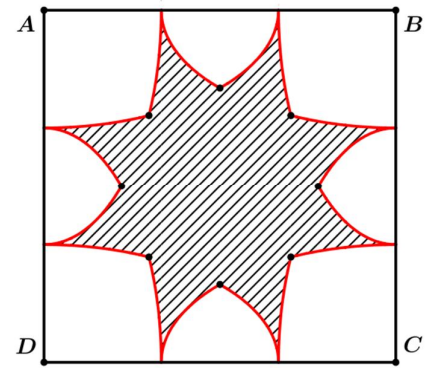
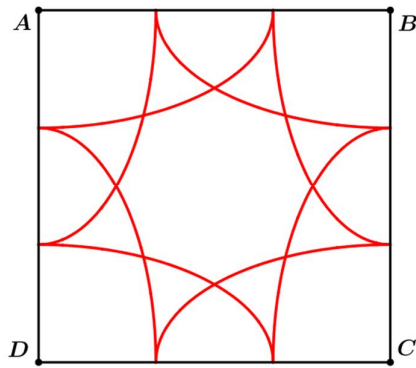
Câu 1: Một hộ gia đình thiết kế một khu vui chơi lớn cho gia đình có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là $AD = 40\text{ m}$ và $AB = 50\text{ m}$. Trong đó, phần được tô màu đậm làm nơi trồng hoa, phần còn lại để làm sân chơi. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là đường cong (C) và các cạnh của hình chữ nhật. Biết mỗi điểm M trên đường cong (C) luôn có tích khoảng cách đến các cạnh AB, AD bằng 20 m . Số tiền chi phí để trồng hoa là 200.000 đ trên một mét vuông, số tiền làm sân chơi là 350.000 đ trên một mét vuông. Số tiền hộ gia đình cần dùng để làm sân chơi là bao nhiêu triệu đồng?



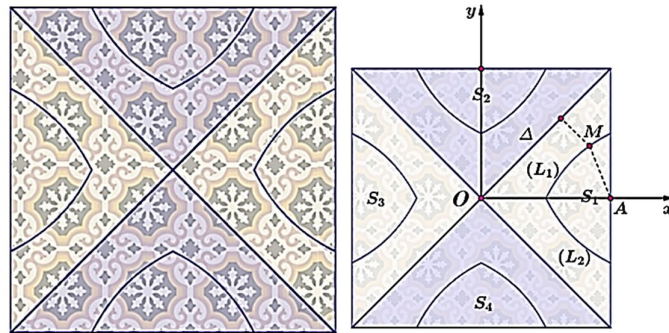
Câu 2: Hình vẽ dưới đây cho biết một miền D (được tô đậm) nằm trong hình vuông cạnh bằng 4. Miền D này gồm những điểm có khoảng cách tới tâm hình vuông nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách tới cạnh gần nhất của hình vuông. Tính diện tích miền D (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



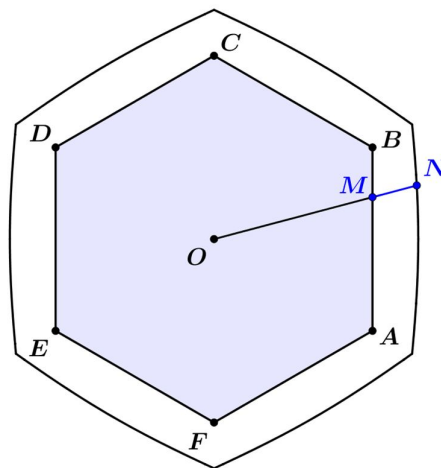
Câu 3: Người ta thiết kế hoa văn trên những viên gạch lát sàn hình vuông độ dài cạnh bằng 1 mét với phần giữa là một bông hoa giới hạn bởi đường cong (L). Biết rằng nếu M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh kề nhau của hình vuông và $MN = 1\text{ m}$ thì MN cắt (L) tại điểm P sao cho $PM = 2PN$. Khi ấy diện tích của bông hoa (phần gạch sọc) trên mỗi viên gạch này là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến 2 chữ số thập phân)?



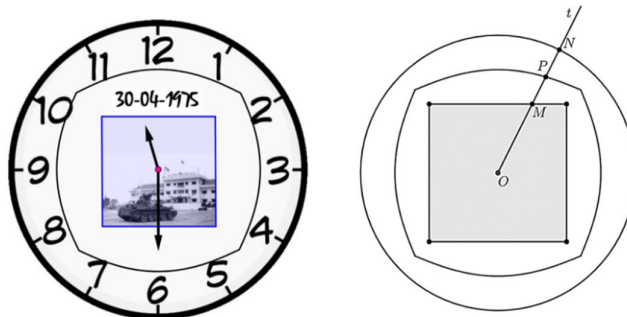
Câu 4: Một viên gạch lát nền nhà có dạng hình vuông với hoa văn được thiết kế bởi một học sinh lớp 12. Xét hình phẳng có diện tích S_1 được tạo thành bởi các đường cong (L_1) , (L_2) và một cạnh viên gạch, trong đó đường (L_1) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA = \sqrt{2}d(M, \Delta)$ (A là trung điểm một cạnh viên gạch; Δ là đường phân giác góc phần tư thứ nhất theo hình vẽ); (L_2) đối xứng với (L_1) qua trục Ox . Biết viên gạch này có kích thước cạnh bằng 40 cm , tính tổng diện tích $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ và làm tròn đến hàng đơn vị của cm^2 .



Câu 5: Người ta tạo một lối đi xung quanh một sân chơi hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O giới hạn bởi các cạnh của lục giác và một đường cong kín (L) (như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của lục giác và tia OM cắt (L) tại điểm N thì ta luôn có $MN = 2m$. Biết rằng $OA = 8m$. Diện tích của lối đi đó bằng bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị).

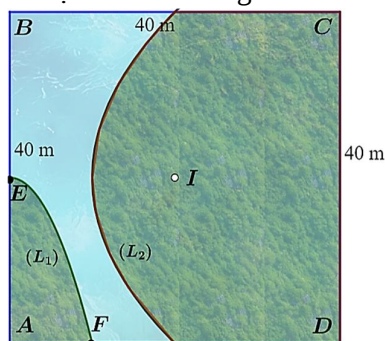


Câu 6: Trong một cuộc thi sáng tạo các chủ đề liên quan đến Kỷ niệm 50 năm ngày miền Nam hoàn toàn giải phóng, tại hệ thống trường Nguyễn Khuyến, Lê Thánh Tông, một em học sinh đến từ lớp 12B1 đã đạt giải đặc biệt với một thiết kế vô cùng độc đáo. Em học sinh này đã thiết kế bề mặt của một chiếc đồng hồ treo tường bằng sự kết hợp giữa lịch sử, mỹ thuật và toán học. Phần trong của mặt đồng hồ là hình vuông có cạnh bằng 2dm, nơi đây lưu giữ hình ảnh của chiếc xe tăng 390 của bộ đội Việt Nam tiến vào dinh độc lập. Phần ngoài của mặt đồng hồ là đường tròn có bán kính bằng 2dm. Đường cong trung gian có tên (L) là tập hợp tất cả điểm P sao cho nếu kẻ tia Ot bất kỳ cắt hình vuông và đường tròn lần lượt tại M, N thì P là trung điểm MN (O là tâm đường tròn). Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (L) theo đơn vị dm^2 và làm tròn đến hàng phần trăm.



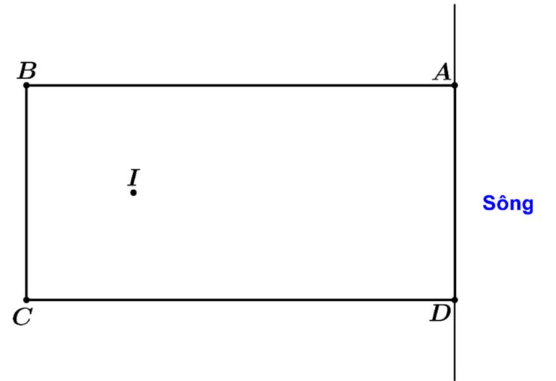
BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1: Bác An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh 40m. Mảnh đất của bác rất phù hợp để trồng hoa màu vì bên trong có một ao nước tự nhiên được giới hạn bởi các đường cong (L_1) , (L_2) và ba cạnh của hình vuông (xem hình vẽ). Biết rằng đường cong (L_1) là một nhánh của parabol nhận điểm E (trung điểm AB) làm đỉnh và đi qua điểm F với $F \in AD$ và $4AF = AD$. Đường cong (L_2) là tập hợp tất cả điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tâm I bằng với khoảng cách từ M đến cạnh AB . Tính diện tích còn lại của mảnh đất mà bác An có thể trồng hoa màu và làm tròn đến hàng đơn vị của mét vuông.

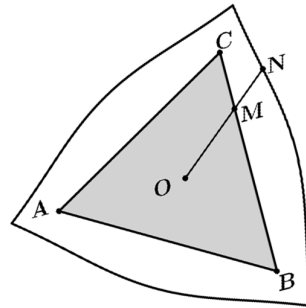


Câu 2: Một lập trình viên tạo một trò chơi. Trong trò chơi đó có một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh $AB = 80m$ và $AD = 40m$. Một con sông nằm bên cạnh vùng đất đó với AD là bờ sông. Một giếng nước khoan được đặt tại điểm I nằm trong hình chữ nhật, cách các cạnh AB, BC, CD 20 mét và cách cạnh AD 60 mét. Nhân vật trong game khi đến cùng đất này cần phải di chuyển đến giếng nước hoặc bờ sông để lấy nước. Lập trình viên muốn tô màu một phần của vùng đất đó sao cho khi đứng trong cùng tô màu này, nhân vật di chuyển đến giếng nước để lấy nước nhanh hơn so với đến bờ sông. Diện tích vùng tô màu đó là bao nhiêu mét

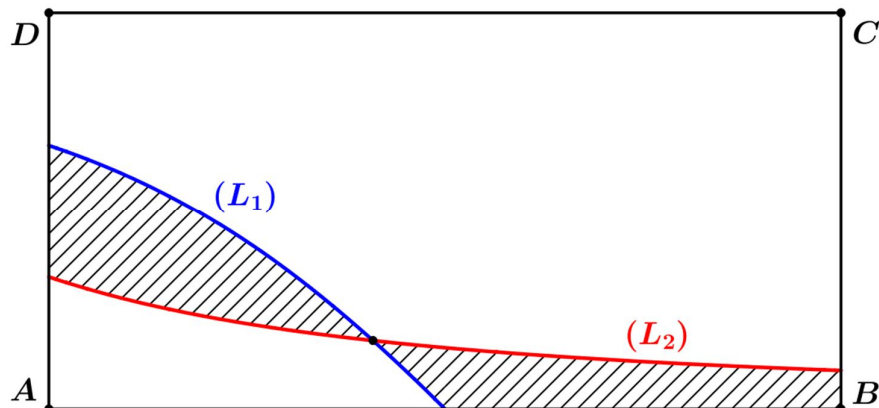
vuông? (Giả sử rằng khi di chuyển, vận tốc của nhân vật không đổi; làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



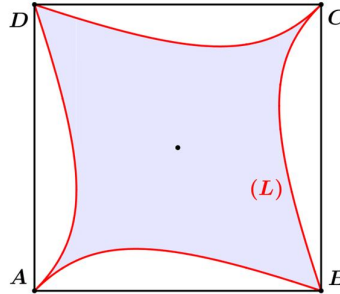
Câu 3: Người ta tạo một lối đi xung quanh một sân chơi hình tam giác đều ABC tâm O giới hạn bởi các cạnh của tam giác và một đường cong kín (L) (như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của tam giác và tia OM cắt (L) tại điểm N thì ta luôn có $MN = 2\text{m}$. Biết rằng $OA = 6\text{m}$ thì diện tích của lối đi đó bằng bao nhiêu mét vuông (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



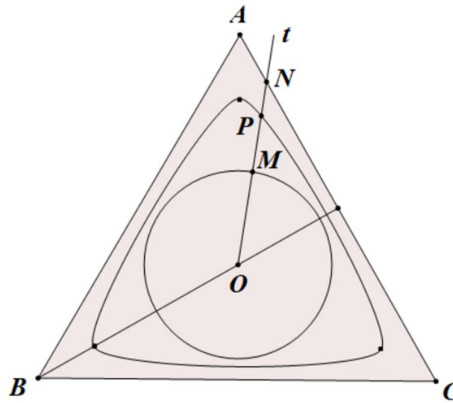
Câu 4: Người ta thiết kế 1 dải sóng trên những viên gạch lát sàn hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước lần lượt là $AB = 160\text{cm}$, $AD = 80\text{cm}$ bằng hai đường cong $(L_1), (L_2)$ và các cạnh hình chữ nhật như hình vẽ trên. Biết rằng nếu M là điểm thuộc đường cong (L_1) thì $MA = \sqrt{5}d(M; BD)$ và nếu N là điểm thuộc đường cong (L_2) thì $ND = \sqrt{5}d(N; \Delta)$ với Δ là đường thẳng qua A và song song với BD . Hỏi diện tích của dải sóng đó trên mỗi viên gạch này là bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



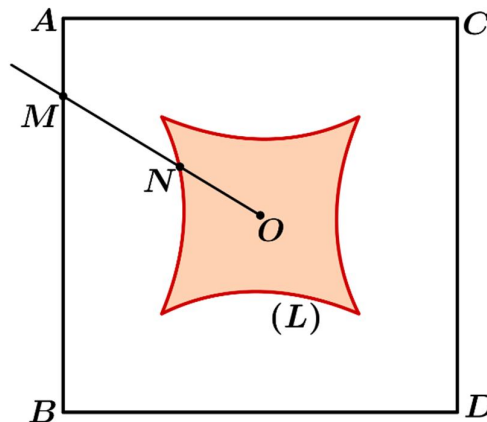
Câu 5: Người ta thiết kế hoa văn trên những viên gạch lát sàn hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 1 mét với phần ở giữa là một bông hoa giới hạn bởi đường cong kín (L) . Biết rằng nếu M là điểm thuộc (L) thì tích khoảng cách từ nó đến hai đường chéo của hình vuông bằng tích khoảng cách từ nó đến hai cạnh AB, AD hoặc CB, CD . Diện tích của bông hoa trên mỗi viên gạch này là bao nhiêu centimet vuông (làm tròn đến hàng đơn vị).



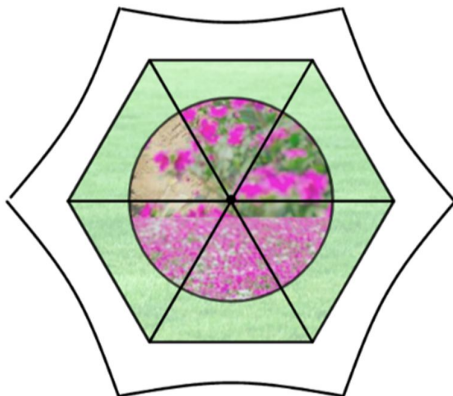
Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4, trọng tâm O và một hình tròn tâm O bán kính bằng 1. Kẻ tia Ot bất kỳ cắt đường tròn tại M , cắt một cạnh tam giác tại N ($\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ cùng hướng). Gọi P là trung điểm của MN . Khi tia Ot quay quanh góc O thì tập hợp các điểm P (trung điểm MN) tạo thành hình (H) . Tính diện tích hình (H) đó.



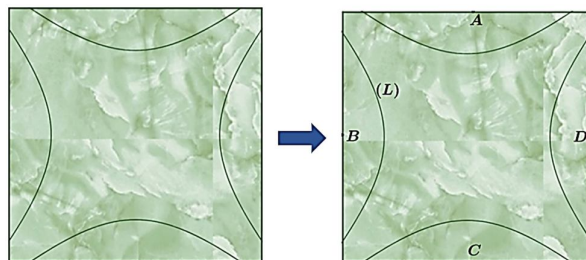
Câu 7: Người nghệ sĩ vẽ một bông hoa trên một miếng bìa hình vuông $ABCD$ tâm O bằng một đường cong kín (L) rồi tô màu cho bông hoa ở giữa. Phần bên ngoài đường cong này của hình vuông thì không tô màu (minh họa như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của hình vuông $ABCD$ và tia OM cắt (L) tại điểm N thì $MN = 2$ dm. Biết rằng $AB = 8$ dm thì phần được nghệ sĩ để trắng có diện tích bằng bao nhiêu centimet vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Câu 8: Một bồn hoa tại một công viên được người kỹ sư thiết kế theo cách thật đặc biệt. Mô hình này được xây dựng từ một hình tròn và một hình lục giác đều cùng tâm O có bán kính và cạnh lần lượt là 2,5m và 4m. Người ta xây dựng đường cong (L) chính là tập hợp tất cả điểm P sao cho khi kẻ tia Op bất kỳ cắt đường tròn, lục giác lần lượt tại M, N thì điểm P đối xứng với M qua N . Phần bên trong đường tròn người ta trồng hoa với chi phí 200 nghìn/ m^2 ; phần ngoài đường tròn và bên trong lục giác người ta trồng cỏ với chi phí 100 nghìn/ m^2 ; phần bên ngoài lục giác và bên trong đường (L) thì người ta lát gạch để tạo lối đi với chi phí 300 nghìn/ m^2 . Hãy tính tổng số tiền người ta phải bỏ ra để làm bồn hoa như trên theo đơn vị triệu đồng (làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 9: Một viên gạch hình vuông có cạnh bằng 60cm; hoa văn chính trên bề mặt viên gạch là đường cong (L) , nó là tập hợp bốn đường cong như hình vẽ.

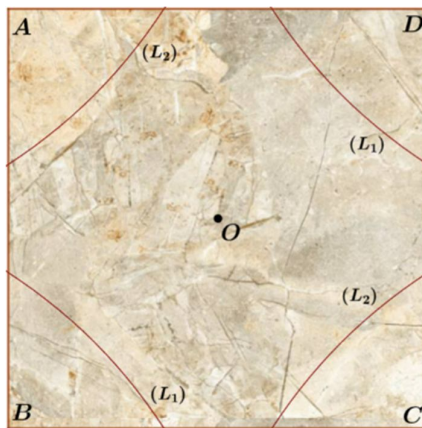


Người thiết kế cho hoa văn đã chọn A, B, C, D là 4 trung điểm của 4 cạnh viên gạch; sau đó dựng các đường cong (L) là tập hợp tất cả điểm M sao cho:

$$\text{Max}\{MA, MB, MC, MD\} - \text{Min}\{MA, MB, MC, MD\} = 40 \text{ (cm)}$$

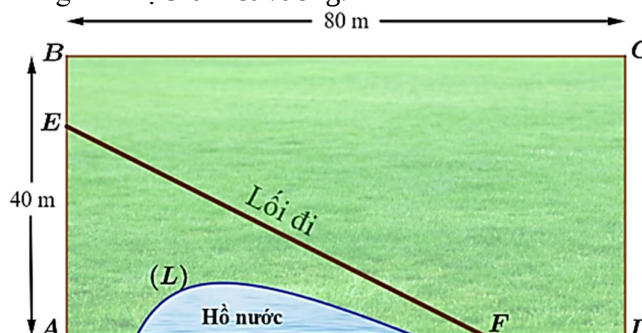
Nếu kéo dài các đường cong này thì chúng cắt nhau tại 4 điểm bên ngoài viên gạch tạo thành hình (H) khép kín. Tìm diện tích hình (H) thuộc bề mặt viên gạch theo đơn vị cm^2 và làm tròn đến hàng đơn vị.

Câu 10: Một viên gạch hình vuông cạnh 60cm có hoa văn bên trong là bốn đường cong như hình vẽ. Giả sử bốn đỉnh viên gạch là A, B, C, D . gọi đường cong (L_1) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MC = MA + 50$ hoặc $MA = MC + 50$.

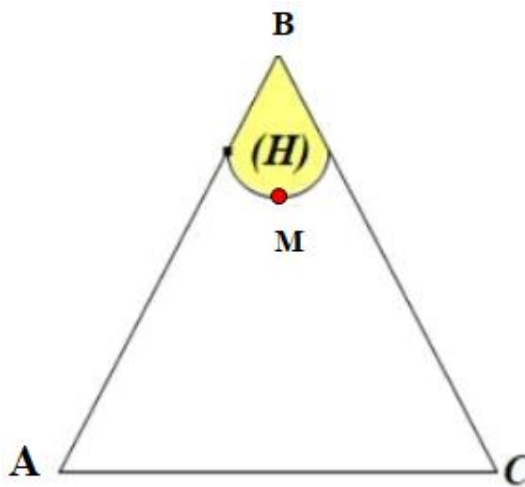
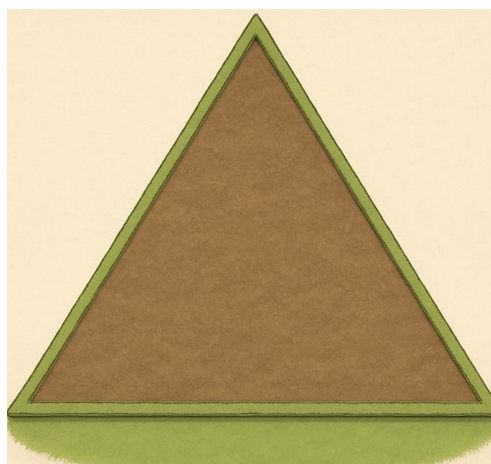


Khi quay đường cong (L_1) quanh tâm viên gạch hình vuông đó một góc 90° ta được đường cong (L_2) . Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường cong (L_1) , (L_2) và các cạnh viên gạch. Tính tỉ số diện tích của (H) so với diện tích của viên gạch và làm tròn đến hàng phần trăm.

Câu 11: Ông Bách có một miếng đất hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài 80 m , chiều rộng 40 m . Trên mảnh đất ấy có một lối mòn EF (xem như đường thẳng) với $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{3}{4}$. Không biết từ bao giờ ở khu vực này đã có một hồ nước tự nhiên, và một phần hồ nước đó thuộc mảnh đất mà ông Bách đang sở hữu. Kỳ lạ thay đường cong (L) bao quanh hồ nước chính là tập hợp các điểm M sao cho $d(M, AB) \times d(M, EF) = \sqrt{5}\text{ m}^2$. Hãy tính diện tích hồ nước trên phần đất nhà ông Bách và làm tròn đến hàng đơn vị của mét vuông.

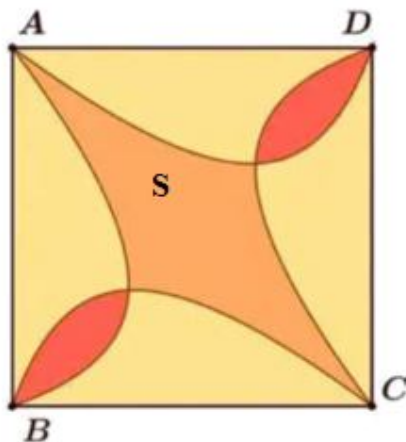


Câu 12: Anh Shiper Toán có một cái vườn dạng tam giác ABC cạnh bằng $40\sqrt{3}$. Anh muốn chia cái vườn đó thành hai phần. Phần một dùng để trồng rau và kí hiệu là hình phẳng (H) , phần hai dùng để trồng hoa. Biết hình phẳng (H) là tập hợp các điểm M nằm trong tam giác đều ABC và thỏa mãn $d_{(M, AC)} \geq 10 + MB$.



Hãy tính diện tích phần trồng hoa theo đơn vị mét vuông (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

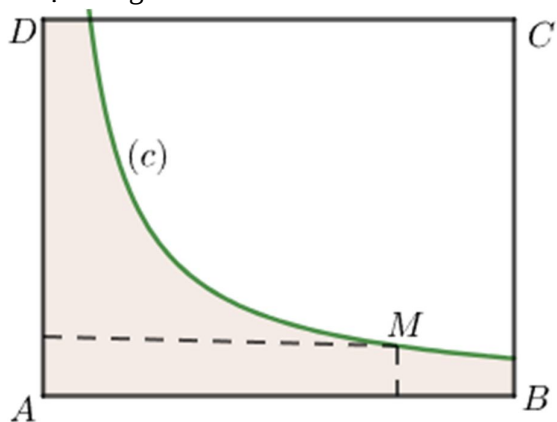
Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4. Gọi M là tập hợp các điểm thỏa mãn với các tam giác vuông có đỉnh của hình vuông $ABCD$ nhận AC làm cạnh huyền. Tích khoảng cách từ M đến cạnh huyền AC và một cạnh góc vuông bằng khoảng cách từ M đến cạnh góc vuông còn lại. Tập hợp các điểm M tạo thành đường cong (L) như hình vẽ. Hãy xác định diện tích phần tô đậm S như hình vẽ (phần tô màu cam chứa tâm hình vuông ở giữa). Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



SKILL. TRUY HÀM TÍNH DIỆN TÍCH

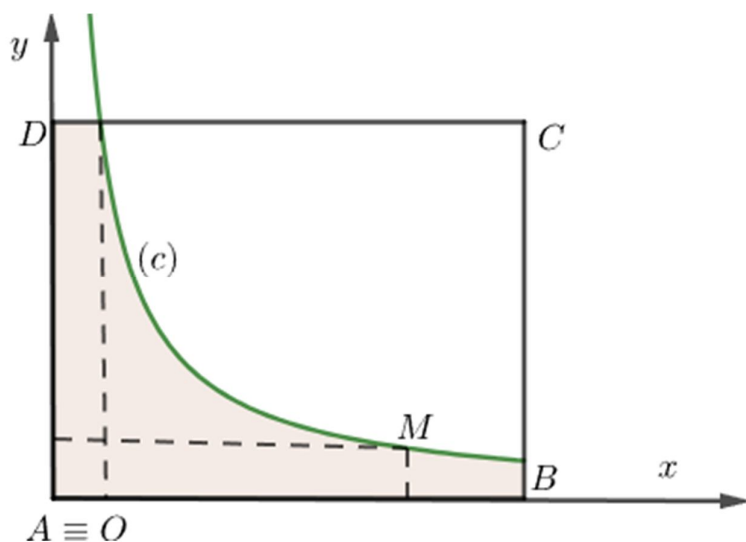
BÀI TẬP TRÊN LỚP

Câu 1: Một hộ gia đình thiết kế một khu vui chơi lớn cho gia đình có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là $AD = 40\text{ m}$ và $AB = 50\text{ m}$. Trong đó, phần được tô màu đậm làm nơi trồng hoa, phần còn lại để làm sân chơi. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là đường cong (C) và các cạnh của hình chữ nhật. Biết mỗi điểm M trên đường cong (C) luôn có tích khoảng cách đến các cạnh AB, AD bằng 20 m . Số tiền chi phí để trồng hoa là 200.000 đ trên một mét vuông, số tiền làm sân chơi là 350.000 đ trên một mét vuông. Số tiền hộ gia đình cần dùng để làm sân chơi là bao nhiêu triệu đồng?



Lời giải

Trả lời: 683



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, mỗi đơn vị tương ứng với 1 m . Gọi $M(x, y)$ theo bài ra ta có

$$x \cdot y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{x}, (x > 0)$$

Phương trình đường DC : $y = 40$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } \frac{20}{x} = 40 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

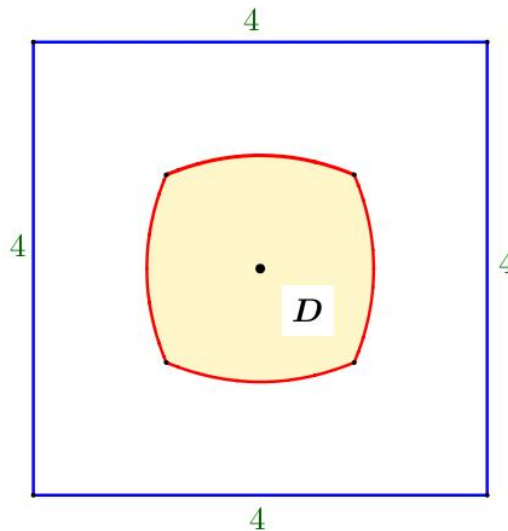
Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S = 40 \cdot 50 = 2000 (\text{m}^2)$.

Diện tích phần sân chơi là $S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{50} \left| 40 - \frac{20}{x} \right| dx \approx 1888 (m^2)$.

Diện tích phần trồng hoa là $S_2 = S - S_1 = 112 (m^2)$.

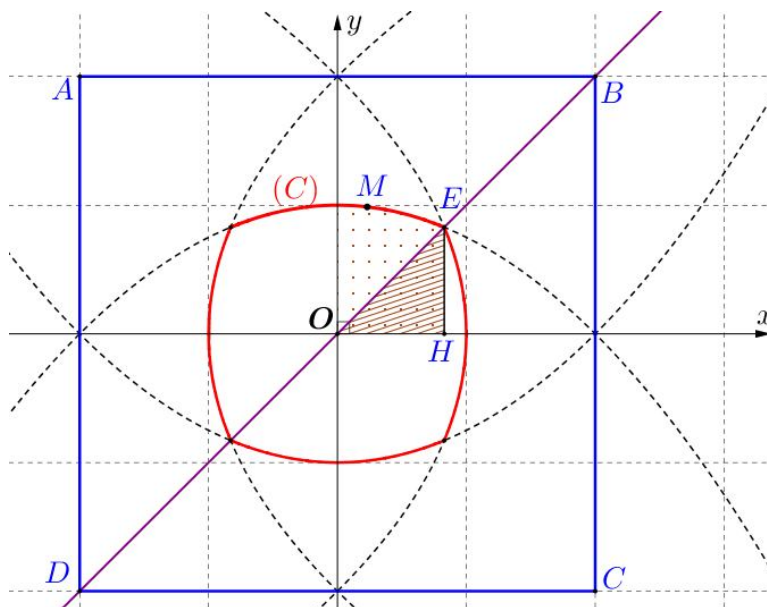
Chi phí cần để làm khu vui chơi lớn là $T = 112.200000 + 1888.350000 = 683.200.000$.

Câu 2: Hình vẽ dưới đây cho biết một miền D (được tô đậm) nằm trong hình vuông cạnh bằng 4. Miền D này gồm những điểm có khoảng cách tới tâm hình vuông nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách tới cạnh gần nhất của hình vuông. Tính diện tích miền D (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Lời giải

Đáp án: 3,5



Gọi hình vuông có cạnh bằng 4 là $ABCD$ và gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Do vai trò của các đường cong như nhau, giả sử $M(x; y)$ là một điểm thuộc đường cong (C) của miền D như hình vẽ.

Ta có khoảng cách từ M tới O là $MO = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Khoảng cách từ M tới cạnh AB của hình vuông là $d(M; AB) = |y - 2|$

Khoảng cách từ M tới O bằng khoảng cách từ M tới AB nên

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |y - 2|$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$$

Hoành độ giao điểm của Parabol $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ và đường thẳng $OB(y = x)$ (thuộc góc phần tư thứ nhất) là nghiệm của phương trình

$$-\frac{1}{4}x^2 + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2\sqrt{2} \\ x = -2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Parabol $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ cắt đường thẳng $OB(y = x)$ tại điểm E thuộc góc phần tư thứ nhất nên

$$x_E = -2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow y_E = -2 + 2\sqrt{2}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = -2 + 2\sqrt{2}$ là

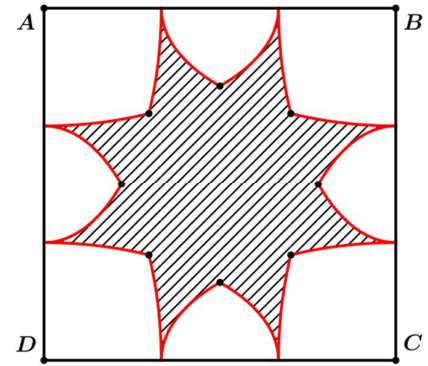
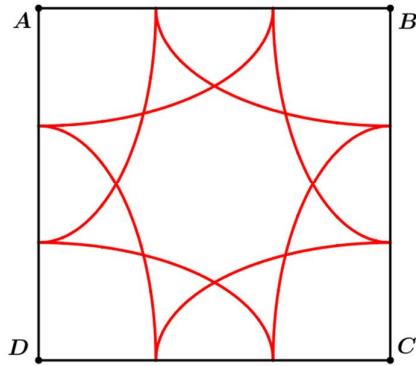
$$S_1 = \int_0^{-2+2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích tam giác OEH là $S_2 = \frac{1}{2}OH.EH = \frac{1}{2}y_E.x_E = \frac{1}{2}(-2 + 2\sqrt{2})^2$.

Diện tích của $\frac{1}{8}$ miền D là $S_3 = S_1 - S_2 = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}(-2 + 2\sqrt{2})^2 = \frac{-10 + 8\sqrt{2}}{3}$.

Diện tích miền D là $S = 8.S_3 = 8 \cdot \frac{-10 + 8\sqrt{2}}{3} \approx 3,5$.

Câu 3: Người ta thiết kế hoa văn trên những viên gạch lát sàn hình vuông độ dài cạnh bằng 1 mét với phần giữa là một bông hoa giới hạn bởi đường cong (L) . Biết rằng nếu M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh kề nhau của hình vuông và $MN = 1m$ thì MN cắt (L) tại điểm P sao cho $PM = 2PN$. Khi ấy diện tích của bông hoa (phần gạch sọc) trên mỗi viên gạch này là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến 2 chữ số thập phân)?



Lời giải

Đáp án: 0,39

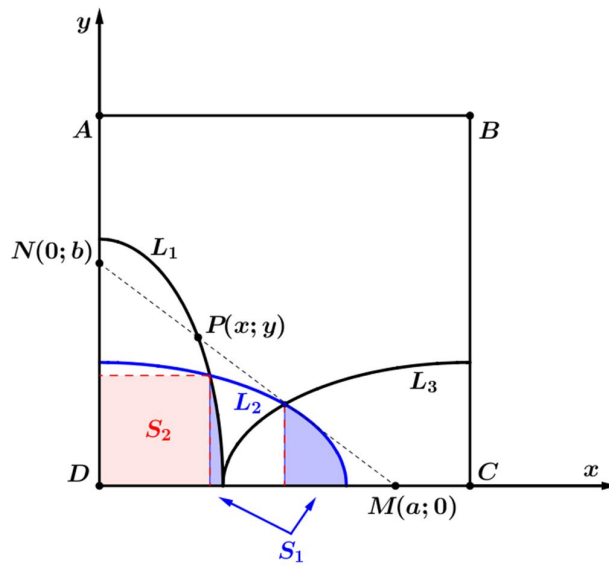
Trước hết ta gọi ba đường cong thành phần của (L) lần lượt là L_1, L_2, L_3 như hình vẽ. Tiếp đến ta áp hệ trục tọa độ Oxy sao cho D trùng gốc tọa độ và AD, CD lần lượt trùng với Oy, Ox và đơn vị trên mỗi hệ trục là 1 mét

Gọi $M(a; 0), N(0; b), a, b \in \mathbb{R}^+$ là hai điểm thuộc Ox, Oy sao cho $MN = 1m$

Khi ấy ta có: $MN^2 = a^2 + b^2 = 1$ và gọi $P(x_p; y_p)$ là điểm thuộc đường thẳng MN sao cho thỏa mãn $PM = 2PN$, khi ấy P nằm giữa M, N nên ta có $\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

$$\text{Suy ra: } x_p = \frac{x_M + 2x_N}{3} = \frac{a}{3}; y_p = \frac{y_M + 2y_N}{3} = \frac{2b}{3} = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{3}$$

$$\text{Khi ấy ta có: } x_p^2 = \frac{a^2}{9}; y_p^2 = \frac{4(1-a^2)}{9} = \frac{4(1-9x_p^2)}{9} \Rightarrow y_p = 2\sqrt{\frac{1}{9} - x_p^2}$$



$$\text{Suy ra phương trình đường cong } L_1 : y = 2\sqrt{\frac{1}{9} - x^2} \text{ và } L_1 \cap Ox = \left(\frac{1}{3}; \dots\right)$$

Tiếp đến dễ thấy rằng khi $P(x_p; y_p) \in L_1$ thì $P(y_p; x_p) \in L_2$ tức 2 đường cong L_1 và L_2 đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$. Dễ thấy $y = 2\sqrt{\frac{1}{9} - x^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{y^2}{4}}$

$$\text{Thế nên ta suy ra phương trình đường cong } L_2 : y = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{x^2}{4}} \text{ và } L_2 \cap Ox = \left(\frac{2}{3}; \dots\right)$$

Giải phương trình hoành độ giao điểm, ta suy ra: $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap \{y = x\} = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}; \dots\right)$

Không cần tìm phương trình đường cong L_3 , dễ dàng thấy hai đường cong L_2 và L_3 đối xứng với nhau qua đường thẳng trung trực của CD nên suy ra $L_2 \cap L_3 = \left(\frac{1}{2}; \dots\right)$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $L_1, Ox, x = \frac{2}{3\sqrt{5}}, x = \frac{1}{3}$ và $L_2, Ox, x = \frac{1}{2}, x = \frac{2}{3}$

$$\text{Khi ấy ta suy ra } S_1 = \int_{\frac{2}{3\sqrt{5}}}^{\frac{1}{3}} 2\sqrt{\frac{1}{9} - x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{x^2}{4}} dx = (m^2)$$

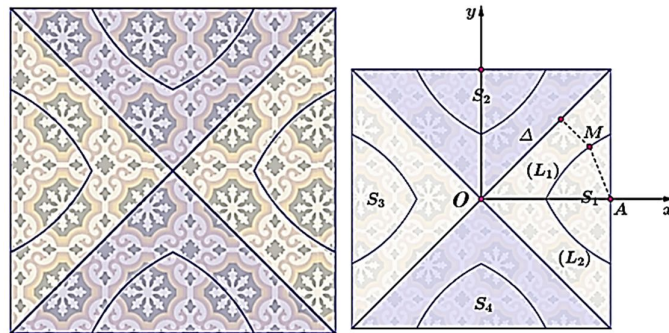
Gọi S_2 là diện tích hình vuông tạo bởi hai đoạn thẳng vuông góc với Ox, Oy từ điểm $L_1 \cap L_2$

$$\text{và 2 trục } Ox, Oy, \text{ khi ấy: } S_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{45}(m^2).$$

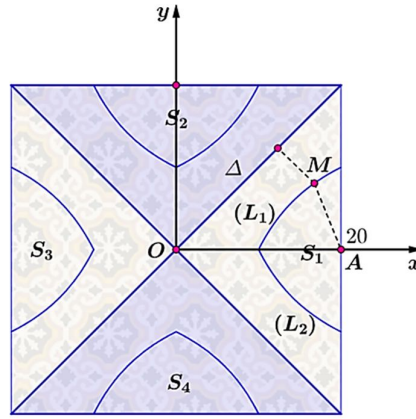
Gọi S_0 là diện tích hình phẳng phần không gian ngoài phần gạch sọc nhưng vẫn bên trong hình vuông $ABCD$, khi ấy ta suy ra: $S_0 = 4S_2 + 8S_1$. Vậy diện tích cần tìm bằng

$$S = 1 - S_0 = 1 - \left(4 \cdot \frac{4}{45} + 8 \cdot \left(\int_{\frac{2}{3\sqrt{5}}}^{\frac{1}{3}} 2\sqrt{\frac{1}{9} - x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{x^2}{4}} dx\right)\right) = 0,386\dots \approx 0,39(m^2)$$

Câu 4: Một viên gạch lát nền nhà có dạng hình vuông với hoa văn được thiết kế bởi một học sinh lớp 12. Xét hình phẳng có diện tích S_1 được tạo thành bởi các đường cong (L_1) , (L_2) và một cạnh viên gạch, trong đó đường (L_1) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA = \sqrt{2}d(M, \Delta)$ (A là trung điểm một cạnh viên gạch; Δ là đường phân giác góc phần tư thứ nhất theo hình vẽ); (L_2) đối xứng với (L_1) qua trục Ox . Biết viên gạch này có kích thước cạnh bằng 40 cm, tính tổng diện tích $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ và làm tròn đến hàng đơn vị của cm^2 .



Lời giải



Tọa độ $A(20; 0)$ và phương trình $\Delta: x - y = 0$.

Gọi $M(x; y)$ là tập hợp các điểm thuộc đường cong (L_1) .

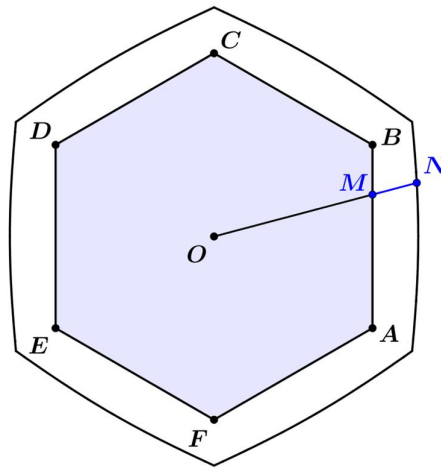
$$\text{Ta có: } MA = \sqrt{2}d(M, \Delta) \Leftrightarrow \sqrt{(x-20)^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 40x + 400 = x^2 + y^2 - 2xy \Leftrightarrow xy = 20x - 200 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{20x - 200}{x}}.$$

$$\text{Giao điểm giữa } (L_1) \text{ với } Ox \text{ thỏa hệ phương trình } \begin{cases} y = \frac{20x - 200}{x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 10.$$

$$\text{Ta có: } S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4S_1 = 4.2 \int_{10}^{20} \frac{20x - 200}{x} dx \approx \boxed{491} \text{ cm}^2.$$

Câu 5: Người ta tạo một lối đi xung quanh sân chơi hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O giới hạn bởi các cạnh của lục giác và một đường cong kín (L) (như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của lục giác và tia OM cắt (L) tại điểm N thì ta luôn có $MN = 2m$. Biết rằng $OA = 8m$. Diện tích của lối đi đó bằng bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 104

$$\text{Ta có độ dài lục giác đều là } a = OA = 8m \text{ nên suy ra } S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} (m^3).$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tọa độ các đỉnh là $O(0;0), A(4\sqrt{3};-4), B(4\sqrt{3};4)$ và đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là mét.

Xét điểm M thuộc **đoạn thẳng** AB (vì tính đối xứng ta sẽ nhân lên sáu lần kết quả này)

Ta có: $M(4\sqrt{3};m) \in [AB], N(x;y)$, trong đó $-4 \leq m \leq 4, x > 4\sqrt{3}$, suy ra $ON = \sqrt{x^2 + y^2}$

Từ đây ta có được: $OM = ON - MN = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$.

Tiếp đến gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên trục hoành.

Theo định lí Ta-lét, ta có: $\frac{ON}{OM} = \frac{OK}{OH} = \frac{NK}{MH} \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - 2} = \frac{t}{t-2}$, đặt $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

Phương trình tương đương: $4\sqrt{3}t = x(t-2) \Leftrightarrow t(x-4\sqrt{3}) = 2x \Leftrightarrow t = \frac{2x}{x-4\sqrt{3}}$

Mà $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ nên suy ra $(L): y = \pm \sqrt{t^2 - x^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{2x}{x-4\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}$

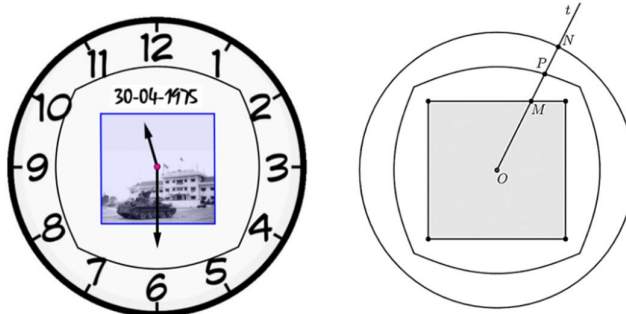
Khi đó: $OA: y = -\frac{x}{\sqrt{3}} \cap (L) = P(5\sqrt{3}; -5)$ và $OB: y = \frac{x}{\sqrt{3}} \cap (L) = Q(5\sqrt{3}; 5)$.

Và $(L) \cap Ox \Leftrightarrow \frac{2x}{x-4\sqrt{3}} = \pm x \Leftrightarrow x = 2 + 4\sqrt{3} \Rightarrow (L) \cap Ox = R(2 + 4\sqrt{3}; 0)$.

Ta có: $S_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot OP^2 \cdot \sin 60^\circ = 25\sqrt{3} (m^2)$.

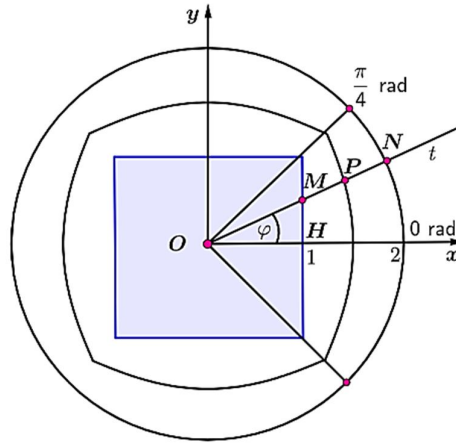
Diện tích của lối đi là: $6 \left[25\sqrt{3} + \int_{5\sqrt{3}}^{2+4\sqrt{3}} 2 \sqrt{\left(\frac{2x}{x-4\sqrt{3}}\right)^2 - x^2} dx \right] - 96\sqrt{3} \approx 103,903 (m^2) \approx 104 (m^2)$

Câu 6: Trong một cuộc thi sáng tạo các chủ đề liên quan đến Kỷ niệm 50 năm ngày miền Nam hoàn toàn giải phóng, tại hệ thống trường Nguyễn Khuyến, Lê Thánh Tông, một em học sinh đến từ lớp 12B1 đã đạt giải đặc biệt với một thiết kế vô cùng độc đáo. Em học sinh này đã thiết kế bề mặt của một chiếc đồng hồ treo tường bằng sự kết hợp giữa lịch sử, mỹ thuật và toán học. Phần trong của mặt đồng hồ là hình vuông có cạnh bằng 2dm, nơi đây lưu giữ hình ảnh của chiếc xe tăng 390 của bộ đội Việt Nam tiến vào dinh độc lập. Phần ngoài của mặt đồng hồ là đường tròn có bán kính bằng 2dm. Đường cong trung gian có tên (L) là tập hợp tất cả điểm P sao cho nếu kẻ tia Op bất kỳ cắt hình vuông và đường tròn lần lượt tại M, N thì P là trung điểm MN (O là tâm đường tròn). Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (L) theo đơn vị dm^2 và làm tròn đến hàng phần trăm.



Lời giải

Sử dụng phương pháp tọa độ cực:



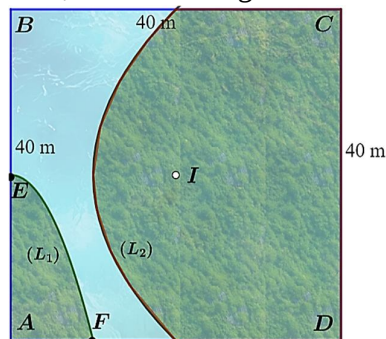
Xét hình vẽ sau với O là tâm hình vuông và tia Ox đi qua trung điểm H của một cạnh hình vuông, gọi φ là góc hợp bởi tia Ox và tia Ot với $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\text{Ta có: } r_\varphi = OP = \frac{OM + ON}{2} = \frac{\frac{1}{\cos \varphi} + 2}{2} = \frac{1 + 2 \cos \varphi}{2 \cos \varphi}.$$

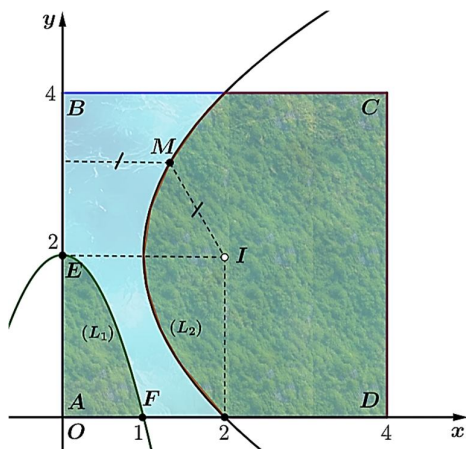
$$\text{Diện tích của đường cong } (L) \text{ là: } S = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (r_\varphi)^2 d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + 2 \cos \varphi}{2 \cos \varphi} \right)^2 d\varphi \approx \boxed{7,67} \text{ } dm^2.$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1: Bác An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh 40m. Mảnh đất của bác rất phù hợp để trồng hoa màu vì bên trong có một ao nước tự nhiên được giới hạn bởi các đường cong (L_1) , (L_2) và ba cạnh của hình vuông (xem hình vẽ). Biết rằng đường cong (L_1) là một nhánh của parabol nhận điểm E (trung điểm AB) làm đỉnh và đi qua điểm F với $F \in AD$ và $4AF = AD$. Đường cong (L_2) là tập hợp tất cả điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tâm I bằng với khoảng cách từ M đến cạnh AB . Tính diện tích còn lại của mảnh đất mà bác An có thể trồng hoa màu và làm tròn đến hàng đơn vị của mét vuông.



Lời giải



Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là 10m.

(L_1) có đỉnh $E(0; 2)$ và qua $F(1; 0)$ nên parabol tương ứng là $y = -2x^2 + 2$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

Gọi $M(x; y)$ là tập hợp các điểm tạo nên (L_2) , ta có:

$$MI = d(M, AB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = |x| \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = x^2$$

$$\Leftrightarrow -4x - 4y + 8 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}y^2 - y + 2.$$

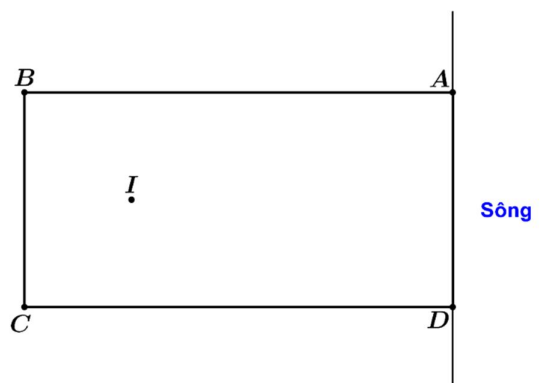
Diện tích tam giác cong AEF trên thực tế là $S_1 = 10^2 \int_0^1 (-2x^2 + 2) dx = \frac{400}{3} m^2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (L_2) với ba cạnh AD, DC, CB là

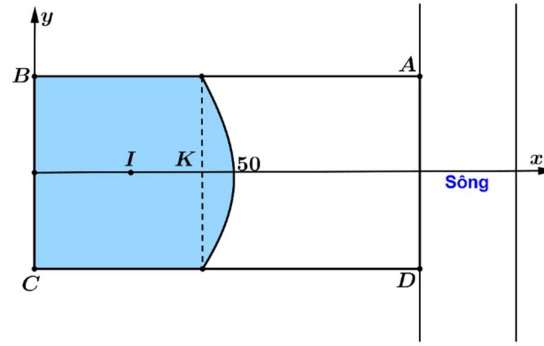
$$S_2 = 40^2 - 10^2 \int_0^4 \left(\frac{1}{4}y^2 - y + 2 \right) dy = \frac{3200}{3} m^2.$$

Tổng diện tích mà bác An có thể trồng trên mảnh đất hình vuông là $S_1 + S_2 = 1200 m^2$.

Câu 2: Một lập trình viên tạo một trò chơi. Trong trò chơi đó có một vùng đất hình chữ nhật ABCD có độ dài các cạnh $AB = 80m$ và $AD = 40m$. Một con sông nằm bên cạnh vùng đất đó với AD là bờ sông. Một giếng nước khoan được đặt tại điểm I nằm trong hình chữ nhật, cách các cạnh AB, BC, CD 20 mét và cách cạnh AD 60 mét. Nhân vật trong game khi đến cùng đất này cần phải di chuyển đến giếng nước hoặc bờ sông để lấy nước. Lập trình viên muốn tô màu một phần của vùng đất đó sao cho khi đứng trong cùng tô màu này, nhân vật di chuyển đến giếng nước để lấy nước nhanh hơn so với đến bờ sông. Diện tích vùng tô màu đó là bao nhiêu mét vuông? (Giả sử rằng khi di chuyển, vận tốc của nhân vật không đổi; làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải



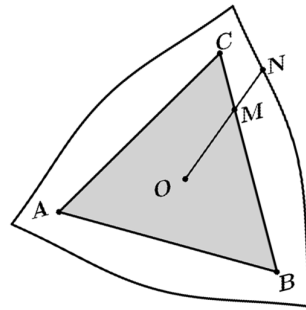
Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc quỹ tích thỏa mãn thì ta có $IM \leq d(M; AD)$

Mặt khác: $IM = \sqrt{(x-20)^2 + y^2}$ suy ra $\sqrt{(x-20)^2 + y^2} \leq |x-80| \Leftrightarrow (x-20)^2 + y^2 \leq (x-80)^2$

Từ đó suy ra $y^2 \leq -120x + 6000$

Diện tích vùng tô màu như hình vẽ. Khi đó $S = 40 \cdot \frac{140}{3} + \frac{2}{3} \left(50 - \frac{140}{3} \right) = \frac{17600}{9} \approx 1956$.

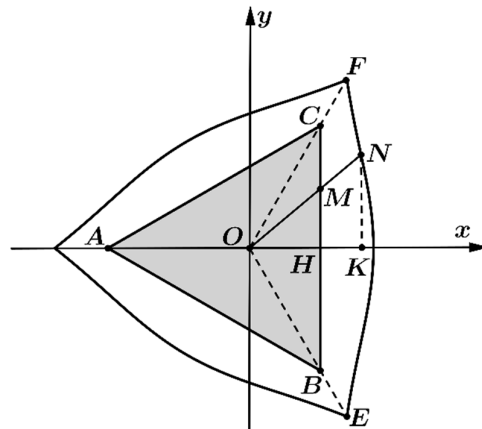
Câu 3: Người ta tạo một lối đi xung quanh một sân chơi hình tam giác đều ABC tâm O giới hạn bởi các cạnh của tam giác và một đường cong kín (L) (như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của tam giác và tia OM cắt (L) tại điểm N thì ta luôn có $MN = 2$ m. Biết rằng $OA = 6$ m thì diện tích của lối đi đó bằng bao nhiêu mét vuông (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Độ dài cạnh tam giác đều là $a = OA\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ suy ra $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tọa độ các đỉnh là $A(-6; 0), O(0; 0), B(3; -3\sqrt{3}), C(3; 3\sqrt{3})$



Vì tính đối xứng của (L) nên ta chỉ cần xét phần của (L) nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ tư của hệ trục tọa độ (Kết quả sẽ nhân ba phần này)

Gọi $M(3;m) \in BC, N(x;y)$ với $(-3\sqrt{3} \leq m \leq 3\sqrt{3}, x > 3) \Rightarrow ON = \sqrt{x^2 + y^2}$

Khi đó $OM = ON - MN = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên trục hoành

Theo Thales, ta có: $\frac{ON}{OM} = \frac{OK}{OH} = \frac{NK}{MH} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{|y|}{|m|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - 2} = \frac{t}{t - 2} \left(t = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$

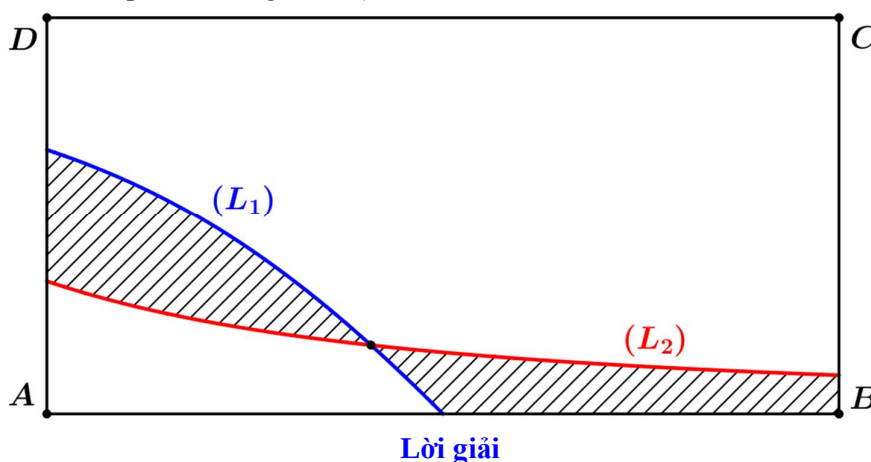
$$\Leftrightarrow 3t = x(t - 2) \Leftrightarrow t(x - 3) = 2x \Leftrightarrow t = \frac{2x}{x - 3} \Rightarrow y = \pm \sqrt{t^2 - x^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{2x}{x - 3} \right)^2 - x^2}$$

Ta có: $OB: y = -\sqrt{3}x \cap (L) = E(4; -4\sqrt{3}); OC: y = \sqrt{3}x \cap (L) = F(4; 4\sqrt{3}); (L) \cap Ox = (5; 0)$

Suy ra $OE = OF = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8 \Rightarrow S_{OEF} = \frac{1}{2} OE \cdot OF \cdot \sin 120^\circ = 16\sqrt{3}$.

Vậy diện tích của lối đi là: $S = 3 \left[16\sqrt{3} + \int_4^5 2 \sqrt{\left(\frac{2x}{x - 3} \right)^2 - x^2} dx \right] - 27\sqrt{3} \approx 59,9768 \text{ m}^2 \approx 60 \text{ m}^2$.

Câu 4: Người ta thiết kế 1 dải sóng trên những viên gạch lát sàn hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước lần lượt là $AB = 160\text{cm}, AD = 80\text{cm}$ bằng hai đường cong $(L_1), (L_2)$ và các cạnh hình chữ nhật như hình vẽ trên. Biết rằng nếu M là điểm thuộc đường cong (L_1) thì $MA = \sqrt{5}d(M; BD)$ và nếu N là điểm thuộc đường cong (L_2) thì $ND = \sqrt{5}d(N; \Delta)$ với Δ là đường thẳng qua A và song song với BD . Hỏi diện tích của dải sóng đó trên mỗi viên gạch này là bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Đáp án: 2026

Đầu tiên chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tọa độ các điểm là

$A(0;0), B(16;0), C(16;8), D(0;8)$ với đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là decimet.

Ta có: $BD: x + 2y - 16 = 0 \Rightarrow \Delta: x + 2y = 0$ (vì qua tọa độ A trùng gốc tọa độ).

Xét điểm $M(x;y) \in (L_1), 0 \leq x \leq 16, 0 \leq y \leq 8$, khi ấy ta có:

$$MA = \sqrt{5}d(M; BD) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x + 2y - 16)^2 \Leftrightarrow 3y^2 + 4(x - 16)y - 32x + 256 = 0$$

Phương trình tương đương với:
$$y = \frac{-2(x-16) \pm \sqrt{x^2 - 8x + 64}}{3}$$

Nhận thấy đường cong (L_1) cắt AD tại tung độ dương bé hơn độ dài $AD=8$ tức $y(0) < 8$ nên

suy ra phương trình đường cong $(L_1): y = \frac{-2(x-16) - \sqrt{x^2 - 8x + 64}}{3}$

Xét điểm $N(x; y) \in (L_2), 0 \leq x \leq 16, 0 \leq y \leq 8$, ta có:

$$ND = \sqrt{5}d(M; \Delta) \Leftrightarrow x^2 + (y-8)^2 = (x+2y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 + 4(x+4)y - 64 = 0$$

Phương trình tương đương với:
$$y = \frac{-2(x+4) \pm \sqrt{x^2 + 8x + 64}}{3}$$

Nhận thấy đường cong (L_2) cắt AD tại tung độ dương bé hơn độ dài $AD=8$ tức $y(0) < 8$ nên

suy ra phương trình đường cong $(L_2): y = \frac{-2(x+4) + \sqrt{x^2 + 8x + 64}}{3}$

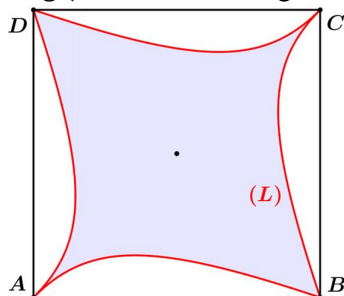
Do $(L_1) \cap Ox = (8; 0)$ nên ta suy ra diện tích phần dải sóng ấy bằng:

$$S = \int_0^8 \left| \frac{-2(x-16) - \sqrt{x^2 - 8x + 64}}{3} - \frac{-2(x+4) + \sqrt{x^2 + 8x + 64}}{3} \right| dx + \int_8^{16} \left[\frac{-2(x+4) + \sqrt{x^2 + 8x + 64}}{3} \right] dx$$

Mà do ta xét đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là 1 decimet = 10 cm tức mỗi đơn vị diện tích trên hệ trục tọa độ Oxy bằng $10^2 = 100 \text{ cm}^2$ đơn vị diện tích thực tế nên diện tích cần tìm có giá trị bằng:

$$S_n = 100S = 2025,8 \approx 2026 (\text{cm}^2)$$

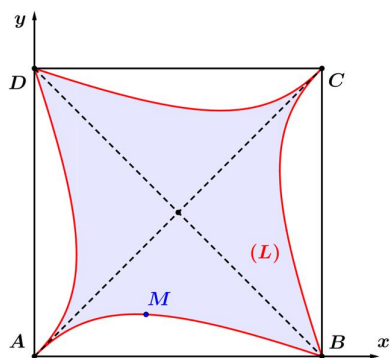
Câu 5: Người ta thiết kế hoa văn trên những viên gạch lát sàn hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 1 mét với phần ở giữa là một bông hoa giới hạn bởi đường cong kín (L) . Biết rằng nếu M là điểm thuộc (L) thì tích khoảng cách từ nó đến hai đường chéo của hình vuông bằng tích khoảng cách từ nó đến hai cạnh AB, AD hoặc CB, CD . Diện tích của bông hoa trên mỗi viên gạch này là bao nhiêu centimet vuông (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 6232

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tọa độ các điểm là $A(0;0), B(1;0), C(1;1), D(0;1)$ và đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét.



Khi ấy ta lần lượt có phương trình đường thẳng $AC: x - y = 0$ và $BD: x + y - 1 = 0$.

Vì tính đối xứng, ta chỉ cần xét (L) gần trục hoành nhất (sau đó lấy kết quả nhân với bốn).

Với $M(x; y) \in L, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x - y \geq 0, x + y - 1 \leq 0$, khi ấy ta có phương trình sau:

$$d(M, AC) \cdot d(M, BD) = d(M, AB) \cdot d(M, AD) \Leftrightarrow |x| \cdot |y| = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{(x - y)(x + y - 1)}{2} \Leftrightarrow y^2 - (2x + 1)y - x^2 - x = 0 \Rightarrow y = \frac{2x + 1 \pm \sqrt{8x^2 + 1}}{2}$$

Đối chiếu với hình vẽ ta có $y(0) = 0$ nên suy ra $L: y = \frac{2x + 1 - \sqrt{8x^2 + 1}}{2}$

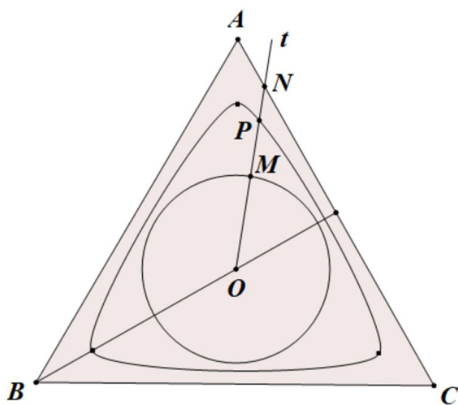
Suy ra diện tích cần tìm là: $S = 1^2 - 4 \int_0^1 \left(\frac{2x + 1 - \sqrt{8x^2 + 1}}{2} \right) dx = 0,6232$

Mà mặt khác đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét tức ứng với mỗi đơn vị diện tích trên mặt phẳng

Oxy nó tương ứng bằng $1m^2 = (100)^2 cm^2 = 10^4 cm^2$ trong thực tế nên ta suy ra diện tích cần

tìm có giá trị là: $S_t = 10^4 S \approx 6232 (cm^2)$

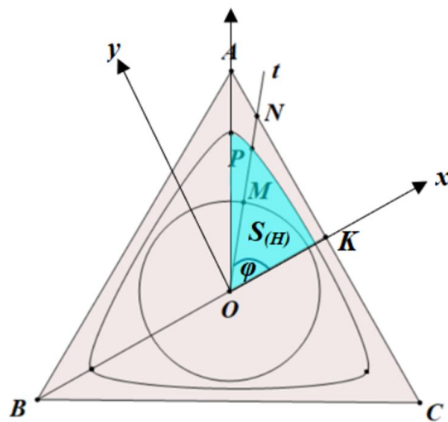
Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4, trọng tâm O và một hình tròn tâm O bán kính bằng 1. Kẻ tia Ot bất kỳ cắt đường tròn tại M , cắt một cạnh tam giác tại N ($\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ cùng hướng). Gọi P là trung điểm của MN . Khi tia Ot quay quanh góc O thì tập hợp các điểm P (trung điểm MN) tạo thành hình (H) . Tính diện tích hình (H) đó.



Giải:

Đáp án: 4,8

- Đặt hệ trục (Oxy) như hình vẽ dưới đây:



- Đặt $(\widehat{Ox, Ot}) = \varphi \rightarrow \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

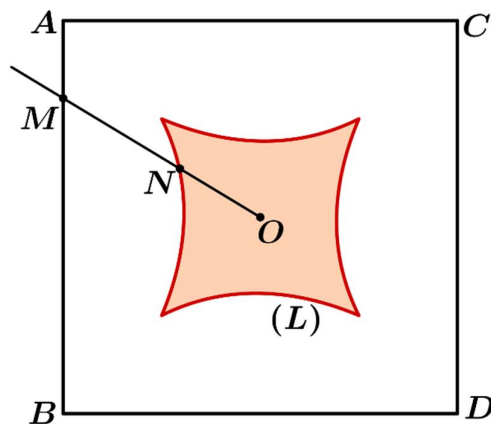
- Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều $\rightarrow BK = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \rightarrow OK = \frac{1}{3} \cdot BK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

- Vì P là trung điểm của MN cho nên ta có: $MP = PN = \frac{MN}{2} = \frac{ON - OM}{2} = \frac{\frac{OK}{\cos(\varphi)} - 1}{2}$

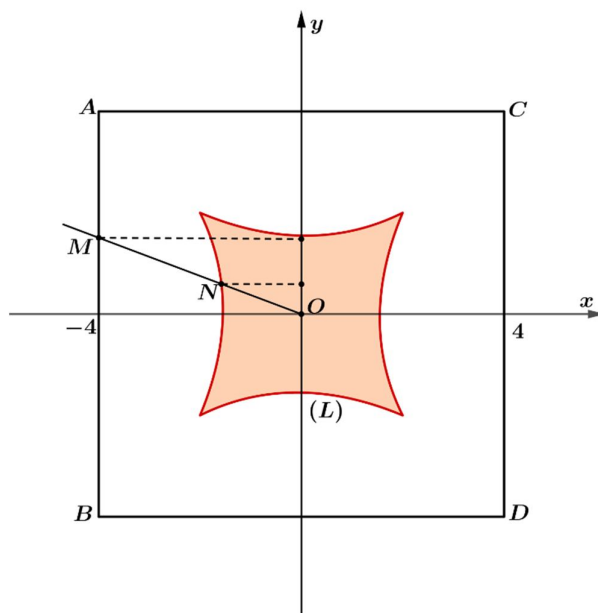
- Ta có: $OP = OM + MP = 1 + \frac{\frac{OK}{\cos(\varphi)} - 1}{2} = 1 + \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}{2 \cos(\varphi)}$

- Vậy diện tích cần tính là: $S = 6 \cdot S_{(H)} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} OP^2 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}{2 \cos(\varphi)}\right)^2 d\varphi \approx 4,8$

Câu 7: Người nghệ sĩ vẽ một bông hoa trên một miếng bìa hình vuông $ABCD$ tâm O bằng một đường cong kín (L) rồi tô màu cho bông hoa ở giữa. Phần bên ngoài đường cong này của hình vuông thì không tô màu (minh họa như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của hình vuông $ABCD$ và tia OM cắt (L) tại điểm N thì $MN = 2$ dm. Biết rằng $AB = 8$ dm thì phần được nghệ sĩ để trắng có diện tích bằng bao nhiêu centimet vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy , sao cho $A(-4;-4), B(-4;4), C(4;4), D(4;-4)$ và $O(0;0)$.

Phương trình cạnh $AB: x = -4$

Vì tính đối xứng của $ABCD$ và miền phẳng được giới hạn bởi (L) nên ta chỉ cần xét phần tô màu nằm ở góc phần tư thứ hai, phía dưới đường thẳng $BD: y = -x$.

Gọi điểm $M(-4;m) \in AB$ và $N(x;y)$, với $-4 \leq m \leq 4; -4 < x < 0$ và $0 \leq y < 4$.

$$\Rightarrow ON = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ và } OM = ON + 2 = \sqrt{x^2 + y^2} + 2.$$

$$\text{Lại có } \frac{ON}{OM} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + 2} = \frac{-x}{4} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{2x}{x+4}.$$

$$\Rightarrow y^2 = \left(-\frac{2x}{x+4}\right)^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{4x^2}{(x+4)^2} - x^2}.$$

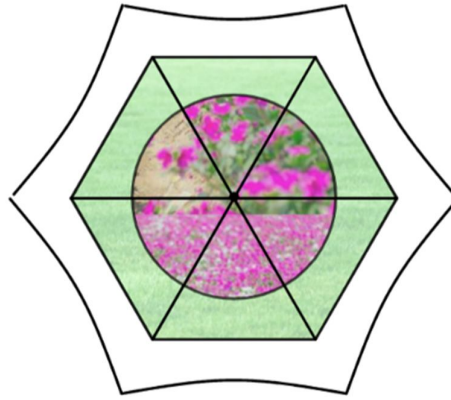
$$\text{Xét phương trình } \sqrt{\frac{4x^2}{(x+4)^2} - x^2} = -x \Rightarrow x = -4 + \sqrt{2} \text{ (vì } -4 < x < 0)$$

$$\text{Và phương trình } \sqrt{\frac{4x^2}{(x+4)^2} - x^2} = 0 \Rightarrow x = -2.$$

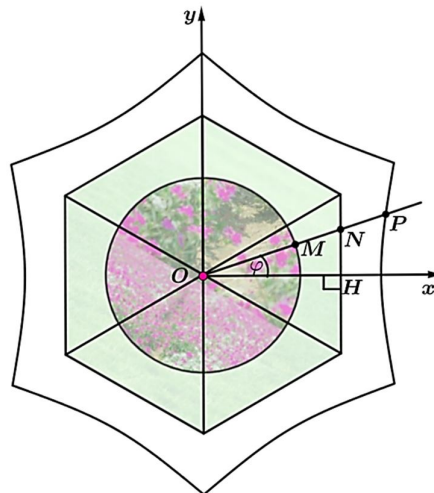
$$\text{Suy ra diện tích hình phẳng } S_1 = \int_{-4}^{-4+\sqrt{2}} (-x)dx + \int_{-4+\sqrt{2}}^{-2} \left(\sqrt{\frac{4x^2}{(x+4)^2} - x^2} \right) dx \quad (dm^2)$$

Vậy diện tích phần không tô màu được tính theo đơn vị centimet vuông (làm tròn đến hàng đơn vị) là: $S = 8.S_1.100 \approx 4384 (cm^2)$

Câu 8: Một bồn hoa tại một công viên được người kỹ sư thiết kế theo cách thật đặc biệt. Mô hình này được xây dựng từ một hình tròn và một hình lục giác đều cùng tâm O có bán kính và cạnh lần lượt là 2,5m và 4m. Người ta xây dựng đường cong (L) chính là tập hợp tất cả điểm P sao cho khi kẻ tia Ot bất kỳ cắt đường tròn, lục giác lần lượt tại M, N thì điểm P đối xứng với M qua N . Phần bên trong đường tròn người ta trồng hoa với chi phí 200 nghìn/ m^2 ; phần ngoài đường tròn và bên trong lục giác người ta trồng cỏ với chi phí 100 nghìn/ m^2 ; phần bên ngoài lục giác và bên trong đường (L) thì người ta lát gạch để tạo lối đi với chi phí 300 nghìn/ m^2 . Hãy tính tổng số tiền người ta phải bỏ ra để làm bồn hoa như trên theo đơn vị triệu đồng (làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải



Gọi H là trung điểm một cạnh lục giác, ta có: $OH = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Đặt φ là góc hợp bởi tia Ox và tia Ot (xét trên góc phần tư thứ I).

Ta có $ON = \frac{OH}{\cos \varphi} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos \varphi}$ và $OM = 2,5$.

Vì P đối xứng với M qua N nên $\frac{OM + OP}{2} = ON \Rightarrow OP = 2ON - OM = \frac{4\sqrt{3}}{\cos \varphi} - 2,5 = r_\varphi$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (L) là:

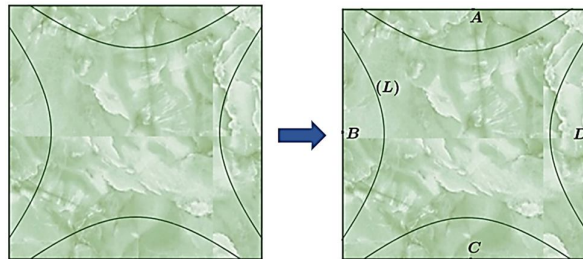
$$S_{(L)} = 12 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (r_\varphi)^2 d\varphi \approx 71,7 \text{ m}^2 \text{ (Lưu vào A)}.$$

Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi \cdot 2,5^2 = \frac{25\pi}{4} \text{ m}^2$; diện tích hình lục giác: $S_2 = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ m}^2$.

Chi phí bỏ ra cho bồn hoa như trên là:

$$S_1 \times 200 + (S_2 - S_1) \times 100 + (S_{(L)} - S_2) \times 300 \approx 15172 \text{ (nghìn đồng)} \approx 15,2 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 9: Một viên gạch hình vuông có cạnh bằng 60cm; hoa văn chính trên bề mặt viên gạch là đường cong (L) , nó là tập hợp bốn đường cong như hình vẽ.

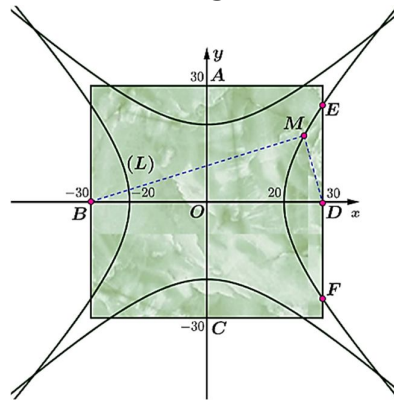


Người thiết kế cho hoa văn đã chọn A, B, C, D là 4 trung điểm của 4 cạnh viên gạch; sau đó dựng các đường cong (L) là tập hợp tất cả điểm M sao cho:

$$\text{Max}\{MA, MB, MC, MD\} - \text{Min}\{MA, MB, MC, MD\} = 40 \text{ (cm)}$$

Nếu kéo dài các đường cong này thì chúng cắt nhau tại 4 điểm bên ngoài viên gạch tạo thành hình (H) khép kín. Tìm diện tích hình (H) thuộc bề mặt viên gạch theo đơn vị cm^2 và làm tròn đến hàng đơn vị.

Lời giải



Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta xét nhánh phải của (L) với M thuộc (L) thì có:

$$\text{Max}\{MA, MB, MC, MD\} - \text{Min}\{MA, MB, MC, MD\} = 40 \Leftrightarrow \boxed{MB - MD = 40}.$$

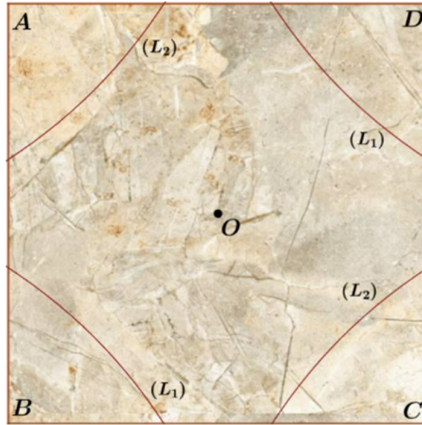
Khi đó M thuộc nhánh hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$); trong đó $2a = 40 \Rightarrow \boxed{a^2 = 400}$.

Hypebol này có hai tiêu điểm B, D nên ta có $c = OD = 30 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$ hay $\boxed{b^2 = 500}$.

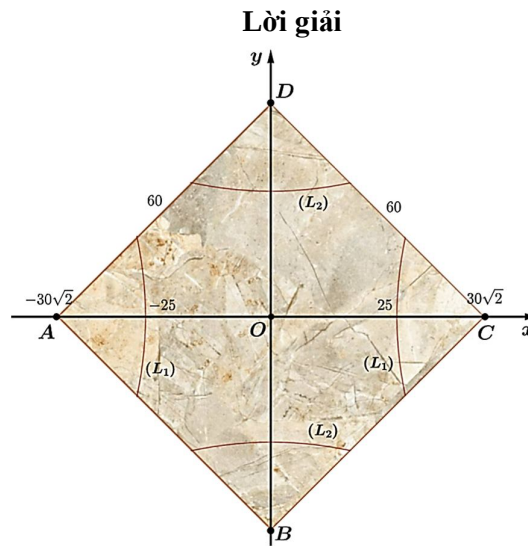
Phương trình hypebol là $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{500} = 1$; chọn nhánh hypebol $y = 10\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{400} + 1}, y \geq 0$.

Diện tích cần tính là $S = 60^2 - 8 \int_{20}^{30} 10\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{400} + 1} \cdot dx \approx 732 \text{ cm}^2$.

Câu 10: Một viên gạch hình vuông cạnh 60cm có hoa văn bên trong là bốn đường cong như hình vẽ. Giả sử bốn đỉnh viên gạch là A, B, C, D . gọi đường cong (L_1) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MC = MA + 50$ hoặc $MA = MC + 50$.



Khi quay đường cong (L_1) quanh tâm viên gạch hình vuông đó một góc 90° ta được đường cong (L_2) . Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường cong (L_1) , (L_2) và các cạnh viên gạch. Tính tỉ số diện tích của (H) so với diện tích của viên gạch và làm tròn đến hàng phần trăm.



Ta có điểm M thỏa mãn $\begin{cases} MC = MA + 50 \\ MA = MC + 50 \end{cases} \Leftrightarrow |MA - MC| = 50 = 2a$.

Do đó tập hợp điểm M là hypebol (L_1) có độ dài trục lớn $2a = 50 \Rightarrow a = 25 \text{ (cm)}$

(L_1) có tiêu cự $2c = AC = 60\sqrt{2} \Rightarrow c = 30\sqrt{2} \text{ cm}; b^2 = c^2 - a^2 = 1175$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, phương trình chính tắc (L_1)

$$\frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{1175} = 1 \Rightarrow y^2 = 1175 \cdot \left(\frac{x^2}{25^2} - 1 \right)$$

Xét một nhánh của (L_1) thuộc góc phần tư thứ nhất có $y = 5\sqrt{47}\sqrt{\frac{x^2}{25^2}-1}$ ($x \geq 25$; $y \geq 0$).

Đường thẳng CD có phương trình $\frac{x}{30\sqrt{2}} + \frac{y}{30\sqrt{2}} = 1$ hay $y = 30\sqrt{2} - x$.

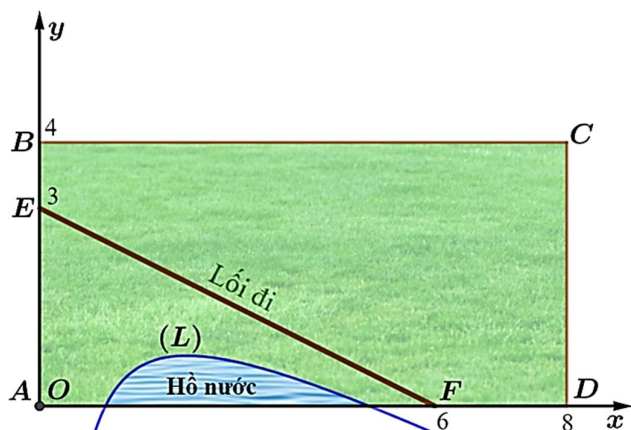
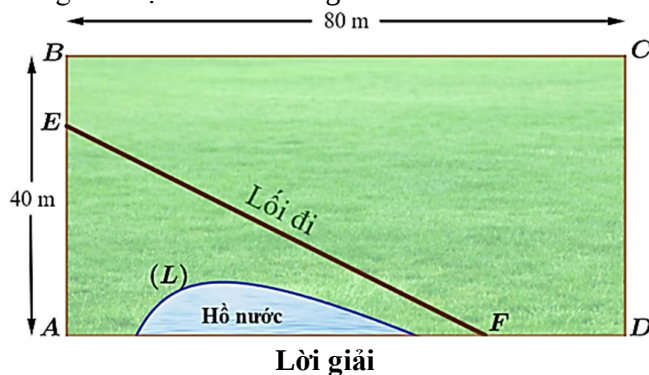
Xét giao điểm của CD với nhánh (L_1) : $5\sqrt{47}\sqrt{\frac{x^2}{25^2}-1} = 30\sqrt{2} - x \Rightarrow x \approx 27,32$ (**lưu vào A**).

Diện tích hình (H) bằng diện tích viên gạch trừ tổng diện tích bốn góc viên gạch (mỗi góc được giới hạn bởi đường cong và hai cạnh viên gạch).

Do vậy $S_{(H)} = 60^2 - 8 \left(\int_{25}^A 5\sqrt{47}\sqrt{\frac{x^2}{25^2}-1} dx + \int_A^{30\sqrt{2}} (30\sqrt{2} - x) dx \right) \approx 2502 \text{ cm}^2$ (**lưu vào B**).

Tỉ số cần tính là $\frac{S_{(H)}}{S_{ABCD}} = \frac{B}{60^2} \approx 0,69$.

Câu 11: Ông Bách có một miếng đất hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài 80 m, chiều rộng 40 m. Trên mảnh đất ấy có một lối mòn EF (xem như đường thẳng) với $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{3}{4}$. Không biết từ bao giờ ở khu vực này đã có một hồ nước tự nhiên, và một phần hồ nước đó thuộc mảnh đất mà ông Bách đang sở hữu. Kỳ lạ thay đường cong (L) bao quanh hồ nước chính là tập hợp các điểm M sao cho $d(M, AB) \times d(M, EF) = \sqrt{5} \text{ m}^2$. Hãy tính diện tích hồ nước trên phần đất nhà ông Bách và làm tròn đến hàng đơn vị của mét vuông.



Dựng hệ trục Oxy như hình vẽ với A trùng gốc tọa độ O , đơn vị trên mỗi trục là 10 m.

Phương trình EF là $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y - 18 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0$.

Gọi $M(x; y)$ là tập hợp điểm thỏa mãn $d(M, AB) \times d(M, EF) = \sqrt{5}$ (*).

$$(*) \text{ tương đương với } |x| \cdot \frac{|x+2y-6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x|x+2y-6| = 5 \text{ (do } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2y-6) = 5 \\ -x(x+2y-6) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{x} - x + 6 \right) \\ y = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{x} - x + 6 \right) \end{cases}$$

Với $y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{x} - x + 6 \right)$ thì $y' = -\frac{5}{x^2} - 1 < 0, \forall x > 0$ (loại vì đồ thị (L) có điểm cực trị).

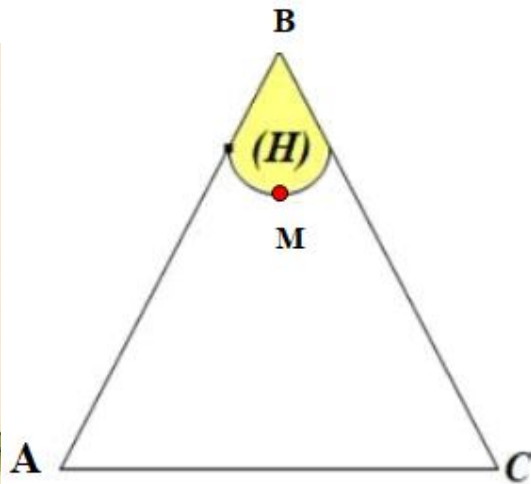
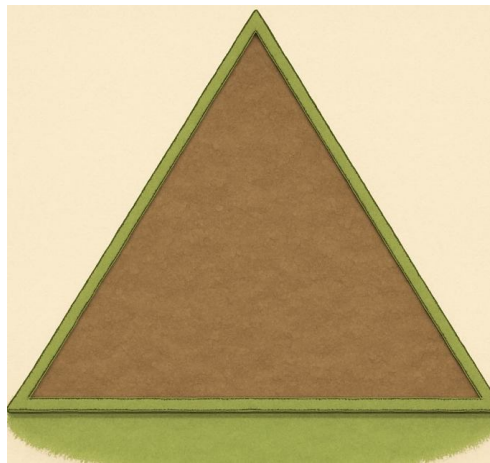
Với $y = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{x} - x + 6 \right)$ thì $y' = \frac{5}{x^2} - 1; y' = 0 \Rightarrow \frac{5}{x^2} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{5} > 0$ (nhận).

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (L) : $y = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{x} - x + 6 \right)$ với Ox :

$$-\frac{5}{2x} - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Diện tích hồ nước thuộc phần đất nhà ông Bách là: $S = 10^2 \times \int_1^5 \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{x} - x + 6 \right) dx \approx 198 \text{ m}^2$.

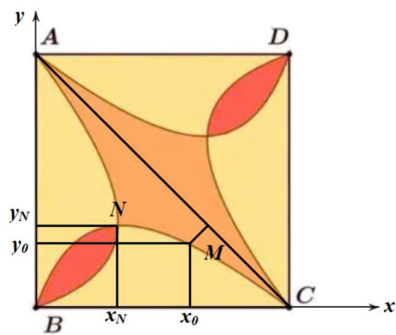
Câu 12: Anh Shiper Toán có một cái vườn dạng tam giác ABC cạnh bằng $40\sqrt{3}$. Anh muốn chia cái vườn đó thành hai phần. Phần một dùng để trồng rau và kí hiệu là hình phẳng (H) , phần hai dùng để trồng hoa. Biết hình phẳng (H) là tập hợp các điểm M nằm trong tam giác đều ABC và thỏa mãn $d_{(M, AC)} \geq 10 + MB$.



Hãy tính diện tích phần trồng hoa theo đơn vị mét vuông (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 1736



- Ta có: $AC: y + x - 4 = 0$

- Dễ thấy $d_{(M, AC)} \cdot x_0 = y_0 \Leftrightarrow \frac{|y_0 + x_0 - 4|}{\sqrt{2}} \cdot x_0 = y_0 \rightarrow y_0 = \frac{4x_0 - x_0^2}{\sqrt{2} + x_0} = f(x)$

- Ta có: $S_{(cam)} = S_{ABCD} - 4 \int_{x_N}^4 f(x) dx - 2 \cdot x_N^2 \quad (1)$

- Mà $x_N = y_N \Leftrightarrow \frac{4x_N - x_N^2}{\sqrt{2} + x_N} = x_N \rightarrow x_N \approx 1,29 \rightarrow STO(A)$

- Vậy $S_{(Cam)} = 16 - 4 \int_A^4 f(x) dx - 2 \cdot A^2 \approx 4$