

CHUYÊN ĐỀ :**PHƯƠNG PHÁP- KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI ĐỂ TÌM CỰC TRỊ DẠNG PHÂN THỨC****ÁP DỤNG VÀO PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ THAM SỐ**

Chuyên đề này hướng dẫn các em các kỹ thuật tách tử thức theo mẫu thức để tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN).

Ví dụ 1: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $K = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}$

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bước 1: Tách phần nguyên. Lấy tử chia mẫu: $K = 2 + \frac{3-4x}{x^2+1}$.

Bước 2: Tìm miền giá trị của phần dư. Đặt $a = \frac{3-4x}{x^2+1}$.

Biến đổi đưa về phương trình bậc hai ẩn x : $ax^2 + 4x + a - 3 = 0$.

Bước 3: Giải điều kiện có nghiệm. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' \geq 0$. Giải $\Delta' = 16 - 4a^2 + 12a = 0$ ta được $a = -1$ hoặc $a = 4$.

Bước 4: Dự đoán và hình thành kỹ thuật biến đổi:

Dự đoán: Khi $a = -1$, thay vào K ta có $K = 2 + (-1) = 1$.

Dự đoán GTNN bằng 1.

Khi $a = 4$, thay vào K ta có $K = 2 + 4 = 6$.

Dự đoán GTLN bằng 6. Kỹ thuật biến đổi:

Để tìm GTNN = 1: Ta biến đổi Tử thức = 1 · Mẫu thức + (biểu thức bình phương).

Để tìm GTLN = 6: Ta biến đổi Tử thức = 6 · Mẫu thức - (biểu thức bình phương).

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

Ta có mẫu thức $x^2 + 1 > 0$ với mọi x . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN):

$$K = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1) + (x^2 - 4x + 4)}{x^2 + 1} = 1 + \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 1} \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN):

$$K = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1} = \frac{6(x^2 + 1) - (4x^2 + 4x + 1)}{x^2 + 1} = 6 - \frac{(2x + 1)^2}{x^2 + 1} \leq 6$$

Dấu “=” xảy ra khi $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -0,5$.

Kết luận: GTNN của K là 1 khi $x = 2$; GTLN của K là 6 khi $x = -0,5$.

Ví dụ 2: Tìm GTNN của biểu thức $E = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bước 1: Nhận diện mẫu thức. Mẫu thức có dạng bình phương một hiệu: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Bước 2: Phương pháp đổi biến. Đặt $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$. Khi đó tử thức trở thành biểu thức theo t : $3(t + 1)^2 - 8(t + 1) + 6$.

Bước 3: Rút gọn và đưa về tam thức bậc hai. Biểu thức E lúc này có dạng $E = 3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$.

Bước 4: Hình thành kỹ thuật biến đổi. Đặt $a = \frac{1}{t}$, ta có $E = a^2 - 2a + 3$. Biến đổi về dạng bình phương cộng một số để tìm GTNN.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

Điều kiện: $x \neq 1$. Đặt $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$. Biến đổi biểu thức E :

$$\begin{aligned} E &= \frac{3(t+1)^2 - 8(t+1) + 6}{t^2} = \frac{3t^2 + 6t + 3 - 8t - 8 + 6}{t^2} = \frac{3t^2 - 2t + 1}{t^2} \\ E &= 3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} \\ &= \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 2 \end{aligned}$$

Vì $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \geq 0$ nên $E \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Kết luận: GTNN của E là 2 khi $x = 2$.

Ví dụ 3: Cho $x > -1$. Tìm GTNN của $A = 4x + \frac{25}{x+1}$

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bước 1: Nhận diện dấu hiệu. Biểu thức có x ở tử và $x + 1$ ở mẫu. Đây là dạng toán điển hình dùng bất đẳng thức Cô-si (AM-GM).

Bước 2: Kỹ thuật cân bằng số hạng. Để áp dụng được Cô-si sao cho triệt tiêu được biến x , số hạng chứa x phải có dạng $(x + 1)$ giống mẫu thức.

Bước 3: Biến đổi. Ta thêm và bớt hằng số: $4x = 4(x + 1) - 4$.

Bước 4: Kiểm tra điều kiện. Với $x > -1$ thì cả $x + 1$ và $\frac{25}{x+1}$ đều dương, đủ điều kiện dùng BĐT Cô-si.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

Với $x > -1$, ta có $x + 1 > 0$. Suy ra $4(x + 1) > 0$ và $\frac{25}{x+1} > 0$. Biến đổi biểu thức A :

$$A = 4(x + 1) + \frac{25}{x + 1} - 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $4(x + 1)$ và $\frac{25}{x+1}$:

$$4(x+1) + \frac{25}{x+1} \geq 2\sqrt{4(x+1) \cdot \frac{25}{x+1}} = 2\sqrt{100} = 20$$

Suy ra $A \geq 20 - 4 = 16$. Dấu “=” xảy ra khi $4(x+1) = \frac{25}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x+1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 1,5$. Kết luận: GTNN của A là 16 khi $x = 1,5$.

B. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

BÀI 1: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $K = \frac{3x^2 - 8x + 9}{x^2 + 1}$ (Dạng phân thức bậc hai/bậc hai tương tự Ví dụ 1)

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bước 1 (Chia tử cho mẫu): Thực hiện phép chia đa thức để tách phần nguyên: $K = 3 + \frac{6-8x}{x^2+1}$.

Bước 2 (Nháp tìm miền giá trị): Đặt $a = \frac{6-8x}{x^2+1} \Rightarrow ax^2 + 8x + a - 6 = 0$.

Bước 3 (Giải điều kiện có nghiệm): Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' = 4^2 - a(a-6) = -a^2 + 6a + 16 = 0$. Giải ra ta được $a = -2$ hoặc $a = 8$.

Bước 4 (Dự đoán và hình thành kỹ thuật):

Dự đoán: Khi thay $a = -2$ vào biểu thức K , ta được $K = 3 + (-2) = 1$.

Dự đoán GTNN bằng 1. Khi thay $a = 8$ vào biểu thức K , ta được $K = 3 + 8 = 11$.

Dự đoán GTLN bằng 11.

Kỹ thuật biến đổi:

Vì GTNN = 1, ta biến đổi Tử thức = 1 · Mẫu thức + (biểu thức bình phương).

Vì GTLN = 11, ta biến đổi Tử thức = 11 · Mẫu thức - (biểu thức bình phương).

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

Ta có mẫu thức $x^2 + 1 > 0$ với mọi x . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN):

$$K = \frac{3x^2 - 8x + 9}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1) + (2x^2 - 8x + 8)}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2(x-2)^2}{x^2 + 1} \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất (GTLN):

$$K = \frac{3x^2 - 8x + 9}{x^2 + 1} = \frac{11(x^2 + 1) - (8x^2 + 8x + 2)}{x^2 + 1} = 11 - \frac{2(2x+1)^2}{x^2 + 1} \leq 11$$

Dấu “=” xảy ra khi $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -0,5$.

Kết luận: GTNN của K là 1 khi $x = 2$; GTLN của K là 11 khi $x = -0,5$.

BÀI 2: Tìm GTNN của biểu thức $Q = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$ (Dạng mẫu thức có dạng bình phương một tổng/hiệu tương tự Ví dụ 2)

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bước 1 (Nhận diện): Mẫu thức có dạng hằng đẳng thức $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Bước 2 (Phương pháp đổi biến): Ta đặt mẫu thức $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$.

Bước 3 (Thực hiện hạ bậc): Thay $x = t + 1$ vào tử số rồi rút gọn theo t , sau đó thực hiện phép chia tử cho mẫu để đưa về dạng tổng các phân thức đơn giản.

Bước 4 (Kỹ thuật biến đổi): Đặt $a = \frac{1}{t}$, ta đưa biểu thức về dạng tam thức bậc hai $f(a) = a^2 - 2a + 2$ và dùng hằng đẳng thức để tìm cực trị.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

Điều kiện: $x \neq 1$. Đặt $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$. Thay vào biểu thức Q , ta có:

$$Q = \frac{2(t+1)^2 - 6(t+1) + 5}{t^2} = \frac{2t^2 + 4t + 2 - 6t - 6 + 5}{t^2} = \frac{2t^2 - 2t + 1}{t^2}$$

$$Q = 2 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1\right) + 1 = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 1$$

Vì $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \geq 0$ nên $Q \geq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của Q là 1 khi $x = 2$.

BÀI 3: Cho $x > 2$. Tìm GTNN của biểu thức $M = x + \frac{9}{x-2}$ (Dạng sử dụng bất đẳng thức Cô-si tương tự Ví dụ 3)

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bước 1 (Dấu hiệu): Biểu thức có chứa x và một phân thức mà mẫu số là $(x - 2)$. Đây là dấu hiệu của việc sử dụng bất đẳng thức Cô-si để triệt tiêu biến x .

Bước 2 (Kỹ thuật cân bằng):

Để áp dụng Cô-si, ta cần biến số hạng x thành đại lượng $(x - 2)$ sao cho giống với mẫu số của số hạng thứ hai.

Bước 3 (Thực hiện):

Ta viết $x = (x - 2) + 2$. Khi đó biểu thức có dạng $A + B + k$ với $A \cdot B$ là một hằng số.

Bước 4 (Kiểm tra): Do $x > 2$ nên $x - 2 > 0$ và $\frac{9}{x-2} > 0$, đủ điều kiện áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

Với $x > 2$, ta có $x - 2 > 0$ và $\frac{9}{x-2} > 0$. Biến đổi biểu thức M :

$$M = x + \frac{9}{x-2} = (x-2) + \frac{9}{x-2} + 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $(x-2)$ và $\frac{9}{x-2}$:

$$(x-2) + \frac{9}{x-2} \geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{9}{x-2}} = 2\sqrt{9} = 6$$

Suy ra: $M \geq 6 + 2 = 8$. Dấu “=” xảy ra khi $x - 2 = \frac{9}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = 3$ (do $x - 2 > 0$) $\Leftrightarrow x = 5$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của M là 8 khi $x = 5$.

BÀI 4: Với $x > 0$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8\sqrt{x}}{x+4}$

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bước 1: Nhận diện và dự đoán điểm rơi. * Biểu thức có dạng phân thức với tử số là $\sqrt{x}$ và mẫu số là $x + 4$.

Để tìm GTLN bằng bất đẳng thức Cô-si, ta thường đưa biến về mẫu số bằng cách chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$.

Dự đoán điểm rơi: Theo bất đẳng thức Cô-si cho mẫu số, điểm rơi xảy ra khi $x = 4$.

Bước 2: Tìm giá trị lớn nhất chính xác. Thay $x = 4$ vào biểu thức: $P = \frac{8\sqrt{4}}{4+4} = \frac{8 \cdot 2}{8} = 2$.

Vậy dự đoán $\text{Max } P = 2$ khi $x = 4$.

Bước 3: Hình thành kỹ thuật biến đổi.

Chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$ (do $x > 0$): $P = \frac{8}{\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}}$.

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho mẫu số để tìm giá trị nhỏ nhất của mẫu, từ đó suy ra GTLN của phân thức.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

Với $x > 0$, ta có $\sqrt{x} > 0$. Chia cả tử và mẫu thức cho $\sqrt{x}$, ta được:

$$P = \frac{8}{\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}}} = \frac{8}{\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}}$$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$ và $\frac{4}{\sqrt{x}} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương này:

$$\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2 \sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{4} = 4$$

. Vì mẫu thức $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 4$ nên ta có:

$$P = \frac{8}{\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}} \leq \frac{8}{4} = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0$).

Kết luận: Giá trị lớn nhất của P là 2 khi $x = 4$.

BÀI 5: Với $x > 0$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{6\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 9}$

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Bước 1: Nhận diện và dự đoán điểm rơi. * Tương tự bài 1, ta chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$ để đưa về dạng mẫu thức chứa hai số nghịch đảo.

Mẫu thức sau khi chia sẽ là: $\sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x}}$.

Dự đoán điểm rơi: $\sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 9$.

Bước 2: Tìm giá trị lớn nhất chính xác. Thay $x = 9$ vào biểu thức: $M = \frac{6\sqrt{9}}{9 + \sqrt{9} + 9} = \frac{6 \cdot 3}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$. Vậy dự đoán $\text{Max } M = \frac{6}{7}$ khi $x = 9$.

Bước 3: Hình thành kỹ thuật biến đổi. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $\sqrt{x}$ và $\frac{9}{\sqrt{x}}$ ở dưới mẫu để tìm GTNN của mẫu thức.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$. Chia cả tử và mẫu của M cho $\sqrt{x}$, ta được:

$$M = \frac{6}{\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{x}}} = \frac{6}{\sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x}}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\sqrt{x}$ và $\frac{9}{\sqrt{x}}$:

$$\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 2 \sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{9}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{9} = 6$$

. Cộng cả hai vế với 1, ta được mẫu thức:

$$\sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 6 + 1 = 7$$

Suy ra:

$$M = \frac{6}{\sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x}}} \leq \frac{6}{7}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0$).

Kết luận: Giá trị lớn nhất của M là $\frac{6}{7}$ khi $x = 9$.

C. ÁP DỤNG VÀO PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ THAM SỐ

BÀI 6. Cho phương trình bậc hai (ẩn x , tham số m): $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó, biểu diễn biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 10}{\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + 1}$ theo tham số m .

b) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức P .

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Phân tích câu a: Để chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt, ta tính biệt thức Δ' và chứng minh $\Delta' > 0$. Sử dụng hệ thức Vi-ét để tìm tổng và tích nghiệm theo m , sau đó thay vào P . Kết quả câu a: Ta thu được biểu thức $P = \frac{2m^2 + 4m + 2}{m^2 + 1}$.

Phân tích câu b (Áp dụng Dạng 1: Cực trị phân thức bậc hai/bậc hai):

Bước 1 (Chia tử cho mẫu): Ta thực hiện phép chia để tách phần nguyên: $P = 2 + \frac{4m}{m^2 + 1}$.

Bước 2 (Tìm miền giá trị phần dư): Đặt $a = \frac{4m}{m^2 + 1} \Rightarrow am^2 - 4m + a = 0$.

Bước 3 (Giải điều kiện có nghiệm): Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' = 4 - a^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 2$.

Bước 4 (Dự đoán điểm rơi và kỹ thuật):

Khi $a = -2 \Rightarrow P = 2 + (-2) = 0$.

Dự đoán GTNN = 0. Kỹ thuật: $Tử = 0 \cdot Mẫu + A^2$.

Khi $a = 2 \Rightarrow P = 2 + 2 = 4$. Dự đoán GTLN = 4.

Kỹ thuật: $Tử = 4 \cdot Mẫu - A^2$.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

a) Chứng minh phương trình có nghiệm và biểu diễn P :

Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - 4) = 4 > 0$ với mọi m . Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = m^2 - 4$. Thay vào biểu thức P :

$$P = \frac{2(m^2 - 4) + 2(2m) + 10}{m^2 + 1} = \frac{2m^2 + 4m + 2}{m^2 + 1}$$

b) Tìm cực trị của biểu thức P : Ta có mẫu thức $m^2 + 1 > 0$ với mọi m . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN):

$$P = \frac{2m^2 + 4m + 2}{m^2 + 1} = \frac{0 \cdot (m^2 + 1) + 2(m^2 + 2m + 1)}{m^2 + 1} = \frac{2(m + 1)^2}{m^2 + 1} \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = -1$. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN):

$$P = \frac{4(m^2 + 1) - (2m^2 - 4m + 2)}{m^2 + 1} = 4 - \frac{2(m - 1)^2}{m^2 + 1} \leq 4$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 1$.

Kết luận: GTNN của P là 0 khi $m = -1$; GTLN của P là 4 khi $m = 1$.

BÀI 7: Cho phương trình bậc hai (ẩn x , tham số m): $x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$

a) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó, biểu diễn biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 5}{(\frac{x_1 + x_2}{2} - 1)^2}$ theo tham số m .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức P .

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Phân tích câu a: Điều kiện có nghiệm: $\Delta' \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$. Hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = m^2 - 2m$. Kết quả câu a: Sau khi thay thế, ta được $P = \frac{2m^2 - 6m + 5}{(m - 1)^2}$.

Phân tích câu b (Áp dụng Dạng 2: Mẫu là bình phương một hiệu):

Bước 1 (Nhận diện): Mẫu số là $(m - 1)^2$, ta sử dụng kỹ thuật đặt ẩn phụ $m - 1 = t$.

Bước 2 (Biến đổi): Thay $m = t + 1$ vào tử số, ta đưa về dạng tam thức bậc hai theo biến $1/t$.

Bước 3 (Hình thành kỹ thuật): Sử dụng phương pháp tách bình phương để tìm GTNN.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

a) Tìm m và biểu diễn P : Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - 2m) = 2m$. Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 0$.

Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = m^2 - 2m$. Thay vào P :

$$P = \frac{2(m^2 - 2m) - 2m + 5}{(m - 1)^2} = \frac{2m^2 - 6m + 5}{(m - 1)^2}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P : Điều kiện $m \geq 0, m \neq 1$. Đặt $m - 1 = t \Rightarrow m = t + 1$. Thay vào biểu thức P ta được:

$$P = \frac{2(t+1)^2 - 6(t+1) + 5}{t^2} = \frac{2t^2 - 2t + 1}{t^2}$$

Thực hiện phép chia:

$$P = 2 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 1$$

$$+1 \forall \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \geq 0 \text{ nên } P \geq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{1}{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn $m \geq 0$).

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $m = 2$.

BÀI 8: Cho phương trình bậc hai (ẩn x , tham số m): $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó, hãy biểu diễn biểu thức

$$P = \frac{2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 13}{\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + 1}$$
 theo tham số m .

b) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức P

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Phân tích câu a: Tính biệt thức $\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m^2 - 4) = 4 > 0$ để khẳng định phương trình luôn có nghiệm phân biệt. Sử dụng hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = m^2 - 4$.

Thay vào biểu thức P , ta thu được: $P = \frac{2m^2 - 4m + 5}{m^2 + 1}$.

Phân tích câu b (Dùng $P = \frac{2m^2 - 4m + 5}{m^2 + 1}$ tìm cực trị):

Bước 1 (Tách phần nguyên): Lấy tử chia mẫu ta được $P = 2 + \frac{3 - 4m}{m^2 + 1}$.

Bước 2 (Tìm miền giá trị phần dư): Đặt $a = \frac{3 - 4m}{m^2 + 1}$.

Biến đổi thành phương trình bậc hai: $am^2 + 4m + a - 3 = 0$. Giải $\Delta' = 0$ tìm được $a = -1$ và $a = 4$.

Bước 3 (Dự đoán điểm rơi): Khi $a = -1 \Rightarrow P = 2 + (-1) = 1$.

Dự đoán GTNN = 1. Khi $a = 4 \Rightarrow P = 2 + 4 = 6$. Dự đoán GTLN = 6.

Bước 4 (Hình thành kỹ thuật): Tìm GTNN = 1:

Biến đổi Tử = 1 · Mẫu + (biểu thức bình phương).

Tìm GTLN = 6: Biến đổi Tử = 6 · Mẫu - (biểu thức bình phương).

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

a) Chứng minh phương trình có nghiệm và biểu diễn P:

Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - 4) = 4 > 0$ với mọi m . Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = m^2 - 4$. Thay vào P:

$$P = \frac{2(m^2 - 4) - 2(2m) + 13}{m^2 + 1} = \frac{2m^2 - 4m + 5}{m^2 + 1}$$

b) Tìm cực trị của biểu thức P: Ta có mẫu thức $m^2 + 1 > 0$ với mọi m . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN):

$$P = \frac{(m^2 + 1) + (m^2 - 4m + 4)}{m^2 + 1} = 1 + \frac{(m - 2)^2}{m^2 + 1} \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN):

$$P = \frac{6(m^2 + 1) - (4m^2 + 4m + 1)}{m^2 + 1} = 6 - \frac{(2m + 1)^2}{m^2 + 1} \leq 6$$

Dấu “=” xảy ra khi $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -0,5$.

Kết luận: GTNN của P là 1 khi $m = 2$; GTLN của P là 6 khi $m = -0,5$.

BÀI 9: Cho phương trình bậc hai (ẩn x, tham số m): $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó, biểu diễn biểu thức $P = \frac{2x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 4}{\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + 1}$ theo tham số m.

b) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức P.

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Phân tích câu a: Tính $\Delta' = 1 > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt. Hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = m^2 - 1$. Thay vào biểu thức P, ta được: $P = \frac{2m^2 + 2m + 2}{m^2 + 1}$.

Phân tích câu b (Dùng $P = \frac{2m^2 + 2m + 2}{m^2 + 1}$ tìm cực trị):

Bước 1 (Tách phần nguyên): Lấy tử chia mẫu ta được $P = 2 + \frac{2m}{m^2 + 1}$.

Bước 2 (Tìm miền giá trị phần dư): Đặt $a = \frac{2m}{m^2 + 1}$.

Biến đổi thành $am^2 - 2m + a = 0$. Giải $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$.

Bước 3 (Dự đoán điểm rơi): Khi $a = -1 \Rightarrow P = 2 + (-1) = 1$.

Dự đoán GTNN = 1. Khi $a = 1 \Rightarrow P = 2 + 1 = 3$.

Dự đoán GTLN = 3. Bước 4 (Hình thành kỹ thuật):

Tìm GTNN = 1: Biến đổi Tử = 1 · Mẫu + (biểu thức bình phương).

Tìm GTLN = 3: Biến đổi Tử = $3 \cdot Mẫu - (biểu thức bình phương)$.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

a) Chứng minh phương trình có nghiệm và biểu diễn P:

Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0$ với mọi m . Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = m^2 - 1$.

Thay vào P: $P = \frac{2(m^2-1)+2m+4}{m^2+1} = \frac{2m^2+2m+2}{m^2+1}$.

b) Tìm cực trị của biểu thức P: Ta có mẫu thức $m^2 + 1 > 0$ với mọi m . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN):

$$P = \frac{(m^2 + 1) + (m^2 + 2m + 1)}{m^2 + 1} = 1 + \frac{(m + 1)^2}{m^2 + 1} \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN):

$$P = \frac{3(m^2 + 1) - (m^2 - 2m + 1)}{m^2 + 1} = 3 - \frac{(m - 1)^2}{m^2 + 1} \leq 3$$

Dấu “=” xảy ra khi $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Kết luận: GTNN của P là 1 khi $m = -1$; GTLN của P là 3 khi $m = 1$.

BÀI 10: Cho phương trình bậc hai (ẩn x, tham số m): $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó, hãy biểu diễn biểu thức $P = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}$ theo tham số m.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức P.

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Phân tích câu a: Tính biệt thức $\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m^2 - m + 1) = m - 1$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$. Thay vào P, ta được: $P = 2m + \frac{1}{2m-2}$.

Phân tích câu b (Sử dụng điều kiện có nghiệm để dùng BĐT Cô-si):

Bước 1: Nhận diện điều kiện dương. Từ câu a, ta có $m \geq 1 \Rightarrow 2m - 2 \geq 0$.

Đây là điều kiện tiên quyết để áp dụng bất đẳng thức Cô-si.

Bước 2: Kỹ thuật cân bằng số hạng. Để triệt tiêu biến m, số hạng bên ngoài phải có dạng $(2m - 2)$ giống như mẫu số.

Bước 3: Biến đổi. $P = (2m - 2) + \frac{1}{2m-2} + 2$.

Bước 4: Áp dụng. Sử dụng Cô-si cho hai số dương $(2m - 2)$ và $\frac{1}{2m-2}$.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

a) Tìm m và biểu diễn P : Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - m + 1) = m - 1$. Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$. Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$. Thay vào biểu thức P :

$$P = 2m + \frac{1}{2m-2}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P : Với $m > 1$, ta có $2m - 2 > 0$. Khi đó số hạng $2m - 2$ và $\frac{1}{2m-2}$ đều dương. Biến đổi biểu thức P :

$$P = (2m - 2) + \frac{1}{2m - 2} + 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $(2m - 2)$ và $\frac{1}{2m-2}$:

$$(2m - 2) + \frac{1}{2m - 2} \geq 2 \sqrt{(2m - 2) \cdot \frac{1}{2m - 2}} = 2\sqrt{1} = 2$$

Suy ra: $P \geq 2 + 2 = 4$. Dấu “=” xảy ra khi $2m - 2 = \frac{1}{2m-2} \Leftrightarrow (2m - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow 2m - 2 = 1$ (do $2m - 2 > 0$) $\Leftrightarrow m = 1,5$ (thỏa mãn $m \geq 1$).

Kết luận: GTNN của P là 4 khi $m = 1,5$.

BÀI 11: Cho phương trình bậc hai (ẩn x , tham số m): $x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó, biểu diễn biểu thức $Q = 2(x_1 + x_2) + \frac{25}{x_1 + x_2 + 2}$ theo tham số m .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức Q .

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Phân tích câu a: $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - m) = m$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 0$. Theo Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$. Thay vào Q : $Q = 4m + \frac{25}{2m+2}$.

Phân tích câu b (Kết hợp điều kiện Δ và Cô-si):

Bước 1: Xác định tính dương. Vì $m \geq 0$ nên $2m + 2 \geq 2 > 0$. Điều này cho phép ta dùng Cô-si.

Bước 2: Kỹ thuật thêm bớt. Ta cần biến đổi $4m$ thành $2(2m + 2) = 4m + 4$ để rút gọn được mẫu số khi nhân.

Bước 3: Hình thành biểu thức. $Q = 2(2m + 2) + \frac{25}{2m+2} - 4$.

Bước 4: Áp dụng Cô-si. Tìm GTNN của tổng hai số dương tỉ lệ nghịch.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

a) Tìm m và biểu diễn Q : Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - m) = m$. Phương trình có nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$. Thay vào biểu thức Q :

$$Q = 2(2m) + \frac{25}{2m+2} = 4m + \frac{25}{2m+2}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của Q : Với $m \geq 0$, ta có $2m+2 > 0$. Khi đó số hạng $2(2m+2)$ và $\frac{25}{2m+2}$ đều dương. Biến đổi biểu thức Q :

$$Q = (4m+4) + \frac{25}{2m+2} - 4 = 2(2m+2) + \frac{25}{2m+2} - 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $2(2m+2)$ và $\frac{25}{2m+2}$:

$$2(2m+2) + \frac{25}{2m+2} \geq 2\sqrt{2(2m+2) \cdot \frac{25}{2m+2}} = 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}$$

Suy ra: $Q \geq 10\sqrt{2} - 4$. Dấu “=” xảy ra khi $2(2m+2) = \frac{25}{2m+2} \Leftrightarrow (2m+2)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow 2m+2 = \frac{5}{\sqrt{2}}$ (do $2m+2 > 0$).

$$\Leftrightarrow 2m = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2 \Leftrightarrow m = \frac{5\sqrt{2}-4}{4} \approx 0,77 \text{ (thỏa mãn } m \geq 0 \text{)}.$$

Kết luận: GTNN của Q là $10\sqrt{2} - 4$ khi $m = \frac{5\sqrt{2}-4}{4}$.

BÀI 12: Cho phương trình bậc hai (ẩn x , tham số m): $x^2 - 2mx + m^2 - m + 2 = 0$

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó, hãy biểu diễn biểu thức $P = x_1 + x_2 + \frac{9}{x_1+x_2-3}$ theo tham số m .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức P .

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Phân tích câu a: Tính biệt thức $\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m^2 - m + 2) = m - 2$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$. Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2m$. Thay vào P , ta thu được biểu thức theo m : $P = 2m + \frac{9}{2m-3}$.

Phân tích câu b (Sử dụng điều kiện $m \geq 2$ để dùng BĐT Cô-si):

Bước 1: Kiểm tra tính dương. Từ điều kiện $m \geq 2$, ta suy ra $2m \geq 4$, do đó mẫu thức $2m - 3 \geq 1 > 0$. Điều này đảm bảo các số hạng trong biểu thức đều dương để áp dụng bất đẳng thức Cô-si.

Bước 2: Kỹ thuật cân bằng số hạng. Để triệt tiêu biến m khi nhân, ta cần biến đổi số hạng $2m$ bên ngoài thành $(2m - 3)$ giống như mẫu số.

Bước 3: Biến đổi. $P = (2m - 3) + \frac{9}{2m-3} + 3$.

Bước 4: Áp dụng. Sử dụng Cô-si cho hai số dương $(2m - 3)$ và $\frac{9}{2m-3}$.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

a) Tìm m để phương trình có nghiệm và biểu diễn P : Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m^2 - m + 2) = m - 2$. Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$. Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$. Thay vào biểu thức P :

$$P = 2m + \frac{9}{2m-3}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P : Với $m \geq 2$, ta có $2m \geq 4 \Rightarrow 2m - 3 \geq 1 > 0$. Khi đó các biểu thức $(2m - 3)$ và $\frac{9}{2m-3}$ đều nhận giá trị dương. + Biến đổi biểu thức P như sau:

$$P = (2m - 3) + \frac{9}{2m-3} + 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $(2m - 3)$ và $\frac{9}{2m-3}$:

$$(2m - 3) + \frac{9}{2m-3} \geq 2 \sqrt{(2m - 3) \cdot \frac{9}{2m-3}} = 2\sqrt{9} = 6$$

. Suy ra $P \geq 6 + 3 = 9$. Dấu “=” xảy ra khi:

$$2m - 3 = \frac{9}{2m-3} \Leftrightarrow (2m - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow 2m - 3 = 3 \text{ (do } 2m - 3 > 0) \Leftrightarrow m = 3$$

(thỏa mãn điều kiện $m \geq 2$). Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là 9 khi $m = 3$.

BÀI 13: Cho phương trình bậc hai (ẩn x , tham số m): $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 6 = 0$

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó, biểu diễn biểu thức $Q = 2(x_1 + x_2) + \frac{16}{x_1 + x_2 - 5}$ theo tham số m .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức Q .

PHÂN TÍCH CÁCH NGHĨ VÀ TÌM LỜI GIẢI

Phân tích câu a: Tính $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - 2m + 6) = 2m - 6$. Phương trình có nghiệm khi $2m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$. Theo Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$. Thay vào biểu thức Q : $Q = 4m + \frac{16}{2m-5}$.

Phân tích câu b:

Bước 1: Xác định tính dương. Vì $m \geq 3$ nên $2m \geq 6$, dẫn đến mẫu thức $2m - 5 \geq 1 > 0$. Điều này cho phép sử dụng BĐT Cô-si cho các số hạng dương.

Bước 2: Kỹ thuật cân bằng. Ta cần tách số hạng $4m$ sao cho xuất hiện đại lượng tỉ lệ với mẫu thức $(2m - 5)$. Ta thấy $4m = 2(2m - 5) + 10$.

Bước 3: Biến đổi. $Q = 2(2m - 5) + \frac{16}{2m-5} + 10$.

TRÌNH BÀY BÀI GIẢI CHI TIẾT

a) Tìm m và biểu diễn Q : Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 - 2m + 6) = 2m - 6$. Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$. Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m$. Thay vào biểu thức Q :

$$Q = 2(2m) + \frac{16}{2m-5} = 4m + \frac{16}{2m-5}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của Q : Với $m \geq 3$, ta có $2m - 5 \geq 2(3) - 5 = 1 > 0$. Do đó, các biểu thức $2(2m - 5)$ và $\frac{16}{2m-5}$ đều dương. Biến đổi biểu thức Q :

$$Q = (4m - 10) + \frac{16}{2m-5} + 10 = 2(2m - 5) + \frac{16}{2m-5} + 10$$

.Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $2(2m - 5)$ và $\frac{16}{2m-5}$:

$$2(2m - 5) + \frac{16}{2m-5} \geq 2\sqrt{2(2m - 5) \cdot \frac{16}{2m-5}} = 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$$

.Suy ra $Q \geq 8\sqrt{2} + 10$. Dấu “=” xảy ra khi:

$$\begin{aligned} 2(2m - 5) &= \frac{16}{2m-5} \Leftrightarrow (2m - 5)^2 = 8 \Leftrightarrow 2m - 5 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2m = 2\sqrt{2} + 5 \Leftrightarrow m \\ &= \sqrt{2} + 2,5 \approx 3,91 \text{ (thỏa mãn } m \geq 3). \end{aligned}$$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của Q là $8\sqrt{2} + 10$ khi $m = \sqrt{2} + 2,5$.